(9.1) Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen, die eine Folge von Münzwürfen beschreibt, sagen wir $\xi_n = +1$ bzw. $\xi_n = -1$ wenn beim n-ten Wurf Kopf bzw. Zahl kommt. Sei $\mathscr{F}_n$ die von $\xi_1, \ldots, \xi_n$ erzeugte σ-Algebra. Finden Sie für die folgenden Ereignisse das kleineste n, sodass das Ereignis in $\mathscr{F}_n$ liegt, falls es so ein $n \in \mathbb{N}$ gibt. [BZ, Ex.3.1]

1. $A = \{$Das erste Auftreten von Kopf erfolgt nach höchstens 10 Mal Zahl$\}$
2. $B = \{$In der gesamten Folge kommt mindestens einmal Kopf$\}$
3. $C = \{$Die ersten 100 Würfe ergeben alle das selbe Ergebnis$\}$
4. $D = \{$Es ist nicht mehr als 2 Mal Kopf und 2 Mal Zahl unter den ersten 10 Würfen $\}$

(9.2) Gegeben sei eine iid Folge $(X_k)_{k\geq 1}$ von $N(0,1)$-Zufallsvariablen und $(S_k)_{k\geq 0}$ ihre Partialsummenfolge. Weiteres sei $(\mathscr{F}_k)_{k\geq 0}$ die von $(S_k)_{k\geq 0}$ erzeugte Filtration. Wir definieren

$$U_k = S_k + k, \quad V_k = S_k + X_k, \quad W_k = \prod_{i=1}^{k} X_i, \quad Z_k = S_k^2 - k \quad (k \geq 1)$$

und $U_0 = 0$, $V_0 = 0$, $W_0 = 1$, $Z_0 = 0$.

1. Ist $(U_k)_{k\geq 0}$ ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal oder keines davon?
2. Ebenso für $(V_k)_{k\geq 0}$.

Begründen Sie Ihre Antworten sorgfältig. [Prüfung vom 25. Jänner 2011]

(9.3) (Fortsetzung)

1. Ebenso für $(W_k)_{k\geq 0}$.
2. Ebenso für $(Z_k)_{k\geq 0}$.

Begründen Sie Ihre Antworten sorgfältig. [Prüfung vom 25. Jänner 2011]

(9.4)
1. Sei (ξ_n) ein Martingal bezüglich $(\mathscr{F}_n)$. Zeigen Sie dass die Folge $(\mathbb{E}[\xi_n])$ konstant ist. [BZ, Ex.3.3]
2. Finden Sie einen adaptierten, integrierbaren Prozess mit konstantem Erwartungswert, der aber kein Martingal ist.

(9.5) Finden Sie eine Submartingal (S_n) und eine konvexe Funktion $\varphi(x)$ sodass $\mathbb{E}[|\varphi(S_n)|] < \infty$, aber $(\varphi(S_n))$ kein Submartingal ist.