(13.1) Gegeben sei eine standard Brownsche Bewegung $(W(t), t \in \mathbb{R}_+)$, die adaptiert zu einer Filtration $(\mathscr{F}(t), t \in \mathbb{R}_+)$ ist.

1. Zeigen Sie sorgfältig: $(Z(t), t \in \mathbb{R}_+)$ ist ein Martingal, wobei $Z(t) = e^{W(t)-t/2}$.
2. Zeigen Sie: $(R(t), t \in \mathbb{R}_+)$ mit $R(t) = \log(1 + Z(t))$ ist ein Supermartingal. [Prüfung Nov.2008]

(13.2) (Fortsetzung, kann aber unabhängig von der vorigen Aufgabe gelöst werden) Berechnen Sie das gemischte Moment $\mu_{a,b}(s,t) = E[Z(s)^a Z(t)^b]$ für $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ und $0 < s < t$. Hinweis: Momenterzeugende Funktion der Normalverteilung. [Prüfung Nov.2008]

(13.3) Sei $\{W(t) : t \geq 0\}$ eine Brownsche Bewegung, $T > 0$ eine feste reelle Zahl und

$$t_j^n = \frac{jT}{n}, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert in $\mathscr{L}^2$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_{j+1}^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)).$$

(13.4) Sei $\{W(t) : t \geq 0\}$ eine Brownsche Bewegung, und $\{\mathscr{F}(t) : t \geq 0\}$ die von ihr erzeugte Filtration. Sei

$$Z(t) = 1_{[0,3)}(t) W(\lfloor t \rfloor), \quad t \geq 0,$$

wobei $\lfloor . \rfloor$ wie üblich die Abrundungsfunktion (Gauß-Klammer) und $1_{[0,3)}(.)$ die Indikatorfunktion des Intervalls $[0,3)$ bezeichnet.[1]

1. Skizzieren Sie (ohne Computer) einen typischen Pfad von $\{Z(t) : t \geq 0\}$ für $0 \leq t \leq 3$.
2. Begründen Sie sorgfältig, warum der Prozess $\{Z(t) : t \geq 0\}$ in *Mtwostep* liegt. (Zufällige Treppenfunktion, Bezeichnung wie in Vorlesung bzw. Buch.)
3. Wir betrachten nun das stochastische Integral

$$Y(t) = \int_0^t Z(s) dW(s),$$

Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für $Y(2)$ und $Y(3)$! („Rechnen Sie das Integral für $t = 2$ und $t = 3$ aus!")

[1] Für eine reelle Zahl x ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist:

$$\lfloor x \rfloor = \max_{k \in \mathbb{Z}, k \leq x} k.$$

(Prüfung Mai 2011)

(13.5) Eine gebrochene Brownsche Bewegung[2] mit Hurst-Parameter $H \in (0,1)$ ist ein zentrierter Gaußscher Prozess $\{X(t), t \geq 0\}$ mit Kovarianzfunktion

$$\gamma(t,s) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right).$$

Für $H = 1/2$ erhalten wir also die übliche Brownsche Bewegung.

Simulieren/Zeichnen Sie (näherungsweise) einige Pfade der fBM

1. für $H = 0.95$,
2. für $H = 0.05$.

Orientieren Sie sich dabei an der Simulationsaufgabe von letzter Woche. Falls Sie die Aufgabe mit dem Computer mit einigermassen feiner Auflösung lösen: Welche qualitativen Unterschiede zwischen den Pfaden können Sie erkennen?

Hinweis: Falls Sie/Ihr System keine komfortable Möglichkeit zur Simulation aus einer multivariaten Normalverteilung kennen, erinnern Sie sich bzw. recherchieren Sie die Cholesky-Zerlegung einer positiv definiten Matrix.

[2] English: Fracional Brownian motion, kurz fBm.