(10.1) Eine Urne enthält b schwarze und w weisse Kugeln. Eine Kugel wird gezogen. Die gezogene, sowie c weitere (neue) Kugeln der gleichen Farbe werden in die Urne gelegt. Sei $(\xi_n)_{n\geq 0}$ der Anteil der schwarzen Kugeln nach n Spielrunden. Zeigen Sie, dass $(\xi_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal ist. [Polyasches Urnenschema]

(10.2) Sei $(\eta_n)_{n\geq 1}$ eine iid Folge von exponentialverteilten Zufallsvariablen mit $E[\eta_n] = 1$. Weiters sei

$$\xi_n = \prod_{k=1}^{n} \eta_k \quad (n \geq 1).$$

1. Begründen Sie sorgfältig, warum $(\xi_n)_{n\geq 1}$ ein Martingal ist.
2. Finden Sie eine obere Schranke für $E\left[\left(\max_{k\leq n} \xi_k\right)^2\right]$.
3. Geben Sie eine einfache nichttriviale[1] obere Schranke für $P\left[\max_{k\leq n} \xi_k > 2\right]$ an.

[Prüfung Mai 2011]

(10.3) (Fortsetzung) Angabe wie oben, aber mit $E[\eta_k] = \mu$, wobei $\mu > 0$ eine vorgegebene Zahl ist.

1. Wie lautet die Dichte von η_k ?
2. Ist $(\xi_n^2)_{n\geq 1}$ ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal, oder überhaupt kein Smartingal? (Begründung!)
3. Ist $\left(\frac{1}{\xi_n}\right)_{n\geq 1}$ ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal, oder überhaupt kein Smartingal? (Begründung!)

[Prüfung Mai 2011]

(10.4) Gegeben sei eine symmetrische einfache Irrfahrt $(X_n)_{n\geq 0}$, also

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Z_k \quad (n \geq 0),$$

wobei $(Z_n)_{n\geq 1}$ iid mit $P[Z_n = 1] = P[Z_n = -1] = 1/2$. Dann ist $(S_n)_{n\geq 0}$ mit

$$S_n = \frac{e^{X_n}}{(\cosh(1))^n} \quad (n \geq 0)$$

ein nichtnegatives Martingal. Sei $M = \max(S_0, S_1, S_2, S_3)$.

[1] D.h. $P(\ldots) \leq 1$ oder schlechter gilt nicht!

1. Berechnen Sie $E[M]$.
2. Berechenen Sie $P[M \geq 2.5]$.
3. Schätzen Sie $P[M \geq 2.5]$ mit der Markov-Ungleichung für M ab.
4. Schätzen Sie $P[M \geq 2.5]$ mit der Kolmogorv-Doob-Extremal-Ungleichung für nichtnegative Sub- bzw. Supermartingale, angewandt auf (S_0, S_1, S_2, S_3) ab.

Runden Sie Ihre Ergebnisse auf vier Nachkommastellen! Hinweis für 1 und 2: Einfach die acht möglichen Fälle betrachten, raffiniertere Methoden würden im Moment zu weit führen.

(10.5) Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, $(\xi_0, \ldots, \xi_n)$ ein adaptierter Prozeß, $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Borelmenge, und

$$\gamma_A = \sup\{0 \leq k \leq n : \xi_k \in A\},$$

wobei (hier) die Konvention $\sup \emptyset = 0$ gelten soll. Zeigen Sie durch ein einfaches konkretes Gegenbeispiel, dass γ_A im Allgemeinen keine Stoppzeit ist.

Versuchen Sie die Aufgabe erst selbsständig und vergleichen Sie dann mit dem Hinweis auf `http://www.fam.tuwien.ac.at/~fhubalek/fue3a.pdf`.