(11.1)
1. Zeigen Sie: Ein nichtnegatives Supermartingal konvergiert fast sicher gegen eine integrierbare Zufallsvariable.
2. Zeigen Sie: Ein von unten beschränktes Supermartingal konvergiert fast sicher gegen eine integrierbare Zufallsvariable.
3. Was kann man dazu über Submartingale sagen?
4. Was über Martingale?

(11.2) Ein Münzwurfspiel wird durch eine symmetrische einfache Irrfahrt $(\xi_n)_{n\geq 0}$ beschrieben. Dabei bezeichnet ξ_n den Gesamtgewinn nach n Spielrunden, wenn der Einsatz konstant 1 ist. Betrachten Sie nun die Strategie 'Doppelt-oder-Nichts' und ihr Ergebnis, also

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_n = \begin{cases} 2\alpha_{n-1} & \text{wenn } \zeta_{n-1} < 0 \\ 0 & \text{wenn } \zeta_{n-1} \geq 0 \end{cases} \qquad (n \geq 2)$$

und

$$\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\xi_k - \xi_{k-1}) \quad (n \geq 0).$$

1. Zeigen bzw. begründen Sie, dass die französiche Bezeichnung 'la martingale' gerechtfertigt ist, d.h. $(\zeta_n)_{n\geq 0}$ ist ein Martingal.
2. Zeigen Sie (mit der Definition), dass $(\zeta_n)_{n\geq 0}$ nicht gleichmäßig interierbar ist.
3. Zeigen bzw. begründen Sie, dass ζ_n für $n \to \infty$ fast sicher konvergiert.
4. Zeigen bzw. begründen Sie (durch direkte Rechnung), dass ζ_n für $n \to \infty$ im Mittel nicht konvergiert.

(11.3) Sei X eine Zufallsvariable mit $P[X = 2^n] = 2^{-n-1}$, $P[X = -2^n] = 2^{-n-1}$, $(n \geq 1)$ und Y eine davon unabhängige Zufallsvariable mit $P[Y = 1] = 1/2$, $P[Y = -1] = 1/2$. Definiere

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = \frac{1}{X}, \quad \xi_2 = \frac{1}{X} + XY.$$

und

$$\tau_n = I_{\{|\xi_|\leq 2^{-n}\}} + \infty I_{\{|\xi_|> 2^{-n}\}} \quad (n \geq 1).$$

1. Begründen Sie kurz, warum (ξ_0, ξ_1, ξ_2) kein Smartingal ist.
2. Begründen Sie kurz, warum jedes τ_n eine Stoppzeit ist.
3. Zeigen Sie, dass $\tau_n \to \infty$ f.s.

4. Zeigen Sie, dass für jedes n der gestoppten Prozess $(\xi_0^{\tau_n}, \xi_1^{\tau_n}, \xi_2^{\tau_n})$ ein Martingal ist.
5. Versuchen Sie in der Literatur/Internet etc. herauszufinden, was ein *lokales Martingal* ist, und stellen Sie einen Bezug zu diesem Beispiel her.

(11.4) Zeigen Sie, dass jedes $\mathscr{L}^1$-beschränkte Martingal als Differenz zweier nichtnegativer Martingale dargestellt werden kann. (Krickeberg-Zerlegung).

(11.5) Sei $\{W(t), t \geq 0\}$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie

$$Cov[W(s), W(t)] = s \wedge t, \quad s, t \geq 0.$$

Gehen Sie dabei von der Definition der Brownschen Bewegung mit Übergangsdichten aus [Buch, Def.6.9].