Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2013S, 2.0h
März 2014
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Geben Sie $\mathbb{E}[W(t)]$, $\mathbb{E}[W(s)]$, $\mathbb{E}[W(t)W(s)]$, und $\mathbb{E}[W(s)^2]$ für $0 \leq s \leq t$ an.

   (b) Wir fixieren nun zwei Zeitpunkte $0 \leq s \leq t$ und definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch
   $$f(c_0, c_1) = \mathbb{E}[(W(t) - c_0 - c_1 W(s))^2], \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$
   Finden Sie c_0, c_1 sodass $f(c_0, c_1)$ minimal wird. (Begründung!)

   (c) Sei c_0^*, c_1^* die Lösung aus der vorherigen Teilaufgabe. Geben Sie $f(c_0^*, c_1^*)$ an.

   (d) Gibt es eine $\mathcal{F}(s)$-messbare Zufallsvariable Y mit $\mathbb{E}[(W(t) - Y)^2] < f(c_0^*, c_1^*)$? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an, wenn nein, geben Sie eine Begründung, warum nicht.

   (e) Sei[1]
   $$\xi(t) = W(t \wedge \pi), \quad t \geq 0$$
   Zeigen Sie, dass $(\xi(t), t \geq 0)$ ein Ito-Prozess ist, indem Sie explizit eine Darstellung
   $$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s) \quad a.s.$$
   für alle $t > 0$ angeben, und zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $\xi(0)$ und die Prozesse $(a(t), t \geq 0)$ und $(b(t), t \geq 0)$ die erforderlichen Eigenschaften haben.

2. Gegeben sei ein AR(2) Prozess ($x_t = 0.2x_{t-1} + 0.5x_{t-2} + \epsilon_t$) wobei (ϵ_t) ein white noise Prozess mit Varianz $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = 2$ ist.

   (a) Überprüfen Sie die Stabilitätsbedingung.

   (b) Berechnen Sie die 2-Schrittprognose für x_{t+2} aus zwei vergangenen Werten, also aus x_t, x_{t-1}. Gesucht sind also die Koeffizienten c_0, c_1, c_1 von $\hat{x}_{t+2} = c_0 + c_1 x_t + c_2 x_{t-1}$.

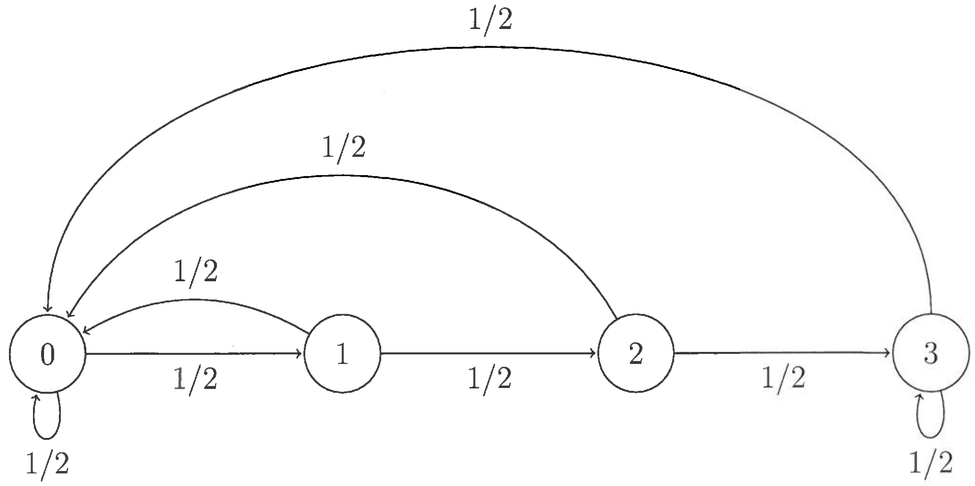
   (c) Kann man die Prognose verbessern, wenn man mehr als zwei vergangene Werte verwendet?

   (d) Berechnen Sie die Varianz des 2-Schrittprognose-Fehlers $\hat{u}_{t+2} = x_{t+2} - \hat{x}_{t+2}$. Hinweis: Drücken Sie die Prognosefehler durch eine Linearkombination von ϵ_{t+2}, ϵ_{t+1}, ϵ_t, ... aus.

   (e) Berechnen Sie die Kovarianz der 2-Schrittprognose-Fehler $\mathbf{Cov}(\hat{u}_{t+2}, \hat{u}_{s+2})$ (für $t, s \in \mathbb{Z}$).

[1] Hier ist $\pi = 3.1415926535\ldots$ und $t \wedge \pi = \min(t, \pi)$.

3. Gegeben Sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{0, 1, 2, 3\}$, Anfangsverteilung δ_0, und Übergangswahrscheinlichkeiten die in folgendem Graphen dargestellt sind.



   (a) Geben Sie die Übergangsmatrix P an.

   (b) Sei $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 3\}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}[T < \infty]$.

   (c) Berechnen Sie $\mathbb{E}_1[T]$.

   (d) Ist die Kette irreduzibel? Wenn ja, begründen Sie genau, wie alle Zustände kommunizieren, wenn nein, geben Sie die Kommunikationsklassen der Kette an.

   (e) Für $n \geq 0$ sei

$$Y_n = \begin{cases} X_{T+n} & \text{wenn } T < \infty, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Ist $(Y_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette? Wenn ja, begründen Sie kurz warum, und geben Sie den Zustandsraum, die Anfangsverteilung und die Übergangsmatrix an, wenn nein, begründen Sie genau, welche Eigenschaft in der Definition einer Markov-Kette nicht erfüllt ist.

4. Es sei (ϵ_t) ein white noise Prozess mit Varianz $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = 1$. Weiters sind zwei lineare Filter $a(B) = 1+B$ und $b(B) = 1-B$ gegegeben. (B ist der Backshift-Operator.) Betrachten Sie folgende MA Prozesse und berechnen Sie deren Autokovarianzfunktion $\gamma(k)$:

   (a) $(x_t) = a(B)(\epsilon_t)$

   (b) $(x_t) = b(B)(\epsilon_t)$

   (c) $(x_t) = a(B)(\epsilon_t) + b(B)(\epsilon_t)$

   Betrachten Sie nun zwei (allgemeine) Filter der Form $a(B) = 1 + a_1 B$ und $b(B) = 1 + b_1 B$. Zeigen Sie, dass der Prozess $(x_t) = a(B)b(B)(\epsilon_t)$ dann und nur dann ein white noise Prozess ist, wenn $a_1 = b_1 = 0$.