Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift oder Bleistift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2013S, 2.0h
13.November 2014
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierer Taschenrechner sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Sei $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ ein white noise Prozess mit Varianz $\mathbf{E}\epsilon_t^2 = \sigma^2 = 1$. Wir betrachten den Prozess $(x_t = 2+\epsilon_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$ und die Filter $K(B) = B^0+B$, $L(B) = B^0-B+B^2-B^3$ und $M(B) = K(B)L(B)$. Berechnen Sie Erwartungswert und Autokovarianzfunktion folgender Prozesse

   (a) $(y_t) = K(B)(x_t)$

   (b) $(z_t) = L(B)(y_t)$ Verwenden Sie dazu die Ergebnisse von Punkt a).

   (c) $(\tilde{z}_t) = M(B)(x_t)$ Berechnen Sie zunächst die Koeffizienten des Produktfilters $(M(B) = K(B)L(B))$ und dann damit den Erwartungswert und ACF von $(\tilde{z}_t)$. Überzeugen Sie sich auch, dass $z_t = \tilde{z}_t$ gilt.

2. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Es sei
   $$f(t) = 1_{[0,1)}(t) + W(1) \cdot 1_{[1,2)}(t), \quad t \geq 0.$$
   Zeigen bzw. begründen Sie, dass $f \in M^2_{\text{step}}$ liegt.

   (b) Berechnen Sie das stochastische Integral $I(f)$ möglichst explizit.

   (c) Sei $g(t) = tW(t)$ für alle $t \geq 0$ und
   $$Y(t) = \int_0^t g(s)dW(s), \qquad t \geq 0.$$
   Berechnen Sie $E[Y(t)]$.

   (d) Berechnen Sie $E[Y(t)^2]$.

   (e) Sei
   $$\xi(t) = 1 + \int_0^t W(s)ds + \int_0^t sdW(s), \qquad t \geq 0.$$
   Wenden Sie die Ito-Formel für $Z(t) = h(t, \xi(t))$ an und geben Sie Ihr Ergebnis in Integralform, also in der Form $Z(t) = Z(0) + \int_0^t [\ldots]ds + \int_0^t [\ldots]dW(s)$ an, wobei $h(t, x) = x^2 e^{-\lambda t}$ für $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$ und $\lambda > 0$ eine feste Konstante ist.

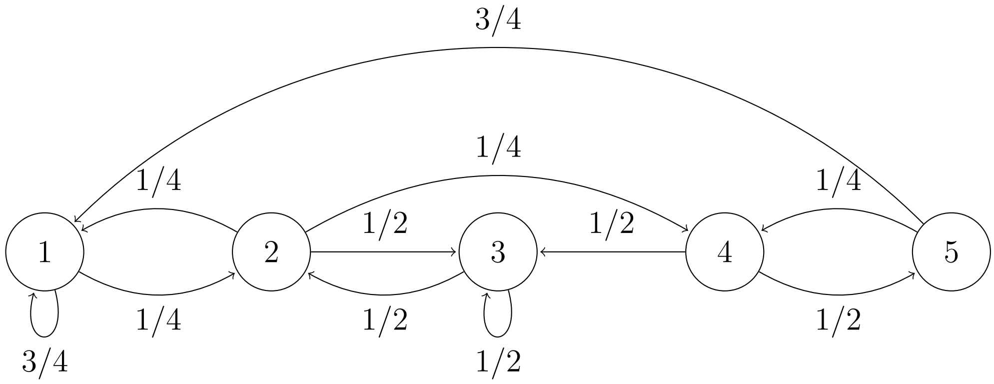
3. Betrachten Sie den Prozess $(x_t = A + (-1)^t B \mid t \in \mathbb{Z})$ wobei A und B zwei quadratisch integrierbare, reelle Zufallsvariable mit $\mathbf{E}A = 0$, $\mathbf{E}B = 0$, $\mathbf{Var}(A) = \sigma_A^2$, $\mathbf{Var}(B) = \sigma_B^2$ und $\mathbf{Cov}(A, B) = 0$ sind.

   (a) Beweisen Sie, dass der Prozess (x_t) stationär ist und berechnen Sie $\mathbf{E}x_t$ und die Autokovarianzfunktion.

   (b) Berechnen Sie die Einschrittprognose $\hat{x}_{t+1}$ aus zwei vergangenen Werten $(k = 2)$ und die entsprechende Prognosefehlervarianz $\sigma_{1,2}^2$.

   (c) Zeigen Sie, dass $A = \frac{1}{2}(x_t + x_{t-1})$ und $B = \frac{(-1)^t}{2}(x_t - x_{t-1})$. Verwenden Sie dieses Resultat, um die h-Schrittprognose $\hat{x}_{t+1}$ aus $k \geq 2$ vergangenen Werten zu bestimmen und zu zeigen, dass $\sigma_{h,k}^2 = 0$ gilt. (Perfekte Prognose!)

4. Gegeben Sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, Anfangsverteilung δ_5, und Übergangswahrscheinlichkeiten die in folgendem Graphen dargestellt sind.



(a) Geben Sie die entsprechende Übergangsmatrix an.

(b) Geben Sie $P[X_6 = 3|X_4 = 4]$ und $P[X_2 = 3]$ an. Hinweis: Sie können wahlweise rechnen oder argumentieren!

(c) Ist die Kette irreduzibel? (Kurze Begründung bzw. Erklärung)

(d) Gibt es rekurrente Zustände? Wenn ja, welche? Gibt es transiente Zustände? Wenn ja, welche? (Kurze fundierte Begründung!)

(e) Sei $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 3\}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}_i[T]$ für $i \in I$.