23. Juni 2010
105.057 Finanzmathematik 2: zeitstetige Modelle, Schmock

Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt

---

1. Betrachte ein Bachelier-Modell mit Zins $r = 0$, also (5 Pkt.)

$$S_t = S_0 + \sigma W_t^*, \qquad 0 \le t \le T,$$

wobei W_t^* eine Standard-Brownsche Bewegung unter dem Martingalmaß $\mathbb{P}^*$ ist.

   (a) Berechne den Arbitrage-freien Preis einer Option mit Auszahlung

$$(S_T - K)^2.$$

   (Hinweis: Die Zerlegung $(S_T - K) = (S_T - S_0) + (S_0 - K)$ vereinfacht die Rechnung.)

   (b) Bilde ein replizierendes Portfolio. Wieviele Aktien und wieviele Bonds enthält es zum Zeitpunkt t?

2. Betrache einen *gap put* mit Auszahlung (5 Pkt.)

$$(L - S_T)\ \mathbf{1}_{\{S_T \le K\}}.$$

   (a) Skizziere die Auszahlungsfunktion. Für welche Werte von K und L nimmt sie negative Werte an?

   (b) Zerlege die Option in eine Put- und eine Binär(=Digital)-Option.

   (c) Bewerte die Option im Black-Scholes-Modell, und bestimme ein replizierendes Portfolio.

   (d) Bestimme die Grenzwerte des Optionspreises für $\sigma \to 0$ und $\sigma \to \infty$.

3. Betrachte das Black-Scholes-Modell mit Zins $r = 0$, und definiere (5 Pkt.)

$$M_t := \max_{u \in [0,t]} S_u.$$

   (a) Ist M_t ein Submartingal unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{P}^*$?

   (b) Ist M_t ein Submartingal unter dem realen Maß $\mathbb{P}$?

   (c) Zeige: Der Preis einer europäischen Option mit Auszahlung M_T ist gleich dem Preis einer entsprechenden amerikanischen Option.