5. Oktober 2010 und 23. November 2010
105.057 Finanzmathematik 2: zeitstetige Modelle, Schmock

Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt

---

1. Fixiere zwei Zeitpunkte $T_0 < T$, und sei $K > 0$. Der Käufer einer forward-start-Put-Option erhält in T_0 einen Put mit Fälligkeit T und strike KS_{T_0}. (5 Pkt.)

   (a) Es bezeichne $P(s, \tau, K)$ den Preis eines Puts mit strike K, Laufzeit τ und aktuellem Aktienpreis s. Schreibe den Optionswert des forward-start-Puts zur Zeit T_0 mithilfe der Funktion P. (Wir nehmen hier noch nicht an, dass der Aktienpreis dem Black-Scholes-Modell folgt.)

   (b) Zeige, dass sich der Preis aus Teil (a) im Black-Scholes-Modell mithilfe eines Puts mit Anfangs-Aktienpreis 1 darstellen läßt, also mit $P(1, Laufzeit, strike)$.

   (c) Was ist der Preis des forward-start-Puts zur Zeit $t \in [0, T_0]$?

2. Betrache eine Option mit Auszahlung (5 Pkt.)

$$S_T \cdot \mathbb{1}_{\{S_T \geq K\}}.$$

   (a) Zerlege die Option in eine Call- und eine Binär(=Digital)-Option.

   (b) Bewerte die Option im Black-Scholes-Modell, und bestimme ein replizierendes Portfolio.

   (c) Bestimme die Grenzwerte des Optionspreises für $\sigma \to 0$ und $\sigma \to \infty$.

3. Betrachte das Black-Scholes-Modell mit Zins $r = 0$, sei $K \geq 0$ und definiere (5 Pkt.)

$$M_t := (S_t - K)^2.$$

   (a) Ist M_t ein Submartingal unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{P}^*$?

   (b) Zeige: Der Preis einer europäischen Option mit Auszahlung M_T ist gleich dem Preis einer entsprechenden amerikanischen Option. (Argumentiere ausführlich, mit Stoppzeiten.)