

Name:

Mat.Nr.:

Kennz.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

**Finanzmathematik II: zeitstetige Modelle**  
**(Vorlesungsprüfung)**  
**25. November 2011**  
**U. Schmock**

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,  
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-105 51,  
e-mail: [sandra.trenovatz@tuwien.ac.at](mailto:sandra.trenovatz@tuwien.ac.at)

---

Bsp.	Max.	Punkte
1	12	
2	12	
3	12	
$\Sigma$	36	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

**Gesamtnote:**

1. Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$  ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum,  $M = (M_t)_{t \in [0, \infty)}$  ein Martingal auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$  mit  $\mathbb{E}[M_0] = m \in \mathbb{R}$  sowie  $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  eine Stoppzeit, unabhängig von  $M$ , die nur endlich viele Werte annimmt.  $M_\tau$  ist eine Zufallsvariable wie gewohnt definiert durch  $M_\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto M_{\tau(\omega)}(\omega)$ . Berechne  $\mathbb{E}[M_\tau]$ .

**Alle Rechenschritte sollen ausgeführt werden!**

2. Sei  $W$  eine standard Brownsche Bewegung.

- (a) Welche stochastische Differentialgleichung löst  $Y_t = \sin(W_t)$ ?
- (b) Welche stochastische Differentialgleichung löst  $Y_t = g(S_t, t)$  mit  $dS_t = \mu dt + \sigma dW_t$ ,  $g(S_t, t) = 2 + t + \exp(S_t)$ ?  
Beachte, dass  $\mu$  und  $\sigma$  konstant sind.

**Alle Rechenschritte sollen ausgeführt werden!**

3. (a) Betrachte eine europäische Call-on-Put Option mit dem ersten Ausübungszeitpunkt  $T_1$  und dem zweiten Ausübungszeitpunkt  $T_2$ , dem ersten Ausübungspreis  $K_1$  und dem zweiten Ausübungspreis  $K_2$ .  
Bestimme den Wert der Option im Zeitpunkt  $T_1$ .
- (b) Fixiere zwei Zeitpunkte  $T_0 < T$ , und sei  $K > 0$ . Der Käufer einer forward-start-Put-Option erhält in  $T_0$  einen Put mit Fälligkeit  $T$  und strike  $KS_{T_0}$ .
- Es bezeichne  $P(s, \tau, K)$  den Preis eines Puts mit strike  $K$ , Laufzeit  $\tau$  und aktuellem Aktienpreis  $s$ . Schreibe den Optionswert des forward-start-Puts zur Zeit  $T_0$  mithilfe der Funktion  $P$ . (Wir nehmen hier noch nicht an, dass der Aktienpreis dem Black-Scholes-Modell folgt.)
  - Zeige, dass sich der Preis aus Teil (a) im Black-Scholes-Modell mithilfe eines Puts mit Anfangs-Aktienpreis 1 darstellen läßt, also mit  $P(1, \text{Laufzeit}, \text{strike})$ .
  - Was ist der Preis des forward-start-Puts zur Zeit  $t \in [0, T_0]$ ?

**Viel Glück!**