Name:

Mat.Nr.:

Kennz.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Lebensversicherungsmathematik
(Vorlesungsprüfung)
01.03.2013
Prof. Rheinländer

(Dauer 90 Minuten, Erlaubte Hilfsmittel: ein handbeschriebener (vorne und hinten) DIN-A4 Zettel und ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-10511,
e-mail: `sandra@fam.tuwien.ac.at`

Bsp.	Max.	Punkte
1	4	
2	4	
3	4	
4	4	
5	4	
$\sum$	20	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. (a) (2 P.) Zeige, dass Folgendes gilt: (4 Pkt.)

$$ {}_tp_x = \exp\Big(-\int_0^t \mu_{x+s}\,ds\Big), \quad t,x \geq 0. $$

   (b) (2 P.) Zeige, dass im Gompertz–Makeham Modell (d.h. $\mu_{x+t} = A + Bc^{x+t}$, für $x,t \geq 0$, $A,B > 0$ und $c > 1$) die Verteilung der zukünftigen Lebensdauer F_x eine Gompertz–Makeham Verteilung besitzt. Zur Erinnerung: Die Gompertz–Makehamverteilung mit Paramentern $\alpha,\beta,\lambda > 0$ ist gegeben durch die Verteilungsfunktion

$$ F(y) = 1 - e^{-\lambda y - \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta y}-1)}, \quad y \geq 0. $$

2. (a) (2 P.) Eine 30-jährige Frau schließt eine 40-jährige gemischte Versicherung mit Versicherungssumme 100 000 Euro ab. Die Prämie wird als Einmalprämie zu Beginn der Laufzeit bezahlt. Anfängliche Kosten fallen in der Höhe von 3% der Versicherungssumme an. Laufende jährliche Kosten betragen 0.5% der Einmalprämie ab dem ersten Jahr. Im Todesfall während der ersten 40 Jahre wird die Summe am Ende des Todesjahres ausbezahlt, ansonsten nach Ablauf der 40 Jahre. Berechne die jährliche Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip. (4 Pkt.)

   (b) (2 P.) Ein 40-jähriger Mann schließt eine 30-jährige Ablebensversicherung mit Versicherungssumme 100 000 Euro ab. Die Prämien werden jährlich vorschüssig bezahlt. Weiters fallen anfängliche Kosten in der Höhe von 2% der Versicherungssumme plus 30% der ersten Prämie an. Laufende Kosten betragen 3% der Prämie ab dem zweiten Jahr. Berechne die Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip.

3. (a) (1 P.) Was versteht man unter einer garantierten Annuitätsoption? (4 Pkt.)

   (b) (1 P.) Zeige, dass der Marktwert einer garantierten Annuitätsoption zur Zeit $T > 0$ gegeben ist durch

$$ V^{\mathrm{GAO}}(T) = 1 + \Bigg(\sum_{n=0}^{\omega-x} p(T,T+n)\,{}_np_x\, r_x^{\mathrm{G}} - 1\Bigg)^+, $$

   wobei r_x^{G} die garantierte Rate, ω das maximale Lebensalter sowie $p(T,T+n)$ der Preis eines Zero-Coupon Bonds mit Maturität $T+n$ zur Zeit T ist.

   (c) (2 P.) Zur Erinnerung: Der Marktwert eines N-Receiver Swaps zur Zeit $T \geq 0$, bei dem während $N > 0$ Jahren die variable LIBOR Rate gegen eine fixe Rate K_N getauscht wird, ist gegeben durch

$$ \Bigg(\sum_{n=1}^{N-1} p(T,T+n)K_N + p(T,T+N)(1+K_N)\Bigg) - 1. $$

   Repliziere für die Zeitpunkte $T+(\omega-x)$ und $T+(\omega-x-1)$ die garantierte Annuität mit $(\omega-x)$-Receiver Swaps sowie $(\omega-x-1)$-Receiver Swaps zu entsprechenden Raten $K^{\omega-x}$ und $K^{\omega-x-1}$.

4. Eine 40-jährige Frau schließt eine Ablebensversicherung ab, wobei bei Tod innerhalb der ersten zwei Jahre 2 000 Euro und bei Tod nach den ersten zwei Jahren 50 000 Euro ausbezahlt werden. Die Prämien werden jährlich vorschüssig bis ans Lebensende bezahlt und im Versicherungsfall wird die Summe am Ende des Todesjahres ausbezahlt. Weiters fallen anfängliche Kosten in der Höhe von 1 000 Euro plus 20% der ersten Prämie an. (4 Pkt.)

   (a) (2 P.) Berechne die Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip.

   (b) (1 P.) Was versteht man unter prospektivem Deckungskapital und warum kann es negativ werden?

   (c) (1 P.) Berechne das ausreichende Deckungskapital für die gesamte Laufzeit.

5. (a) (1 P.) Was versteht man unter zensierten Daten? Gib eine kurze Beschreibung des Kaplan–Meier Schätzers $\widehat{S}$ und des Nelson–Aalen Schätzers $\widetilde{S}$. (4 Pkt.)

   (b) (2 P.) Berechne den Kaplan–Meier Schätzer und den Nelson–Aalen Schätzer zu folgenden Daten von Ausscheidezeitpunkten, wobei das '+' ein zensiertes Leben markiert: $2, 3, 4, 4, 4, 4+, 6, 6, 6, 6, 6+$.

   (c) (1 P.) Zeige die Ungleichung $\widetilde{S}(t) \geq \widehat{S}(t)$, für alle $t \geq 0$. (Hinweis: Taylorreihe der Exponentialfunktion)

Viel Erfolg!