Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Lebensversicherungsmathematik (Vorlesungsprüfung) 28. Januar 2014 Prof. Thorsten Rheinländer

90 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: ein handbeschriebener DIN-A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-10511
email: sandra@fam.tuwien.ac.at

Bsp.	Max.	Punkte
1	4	
2	6	
3	4	
4	3	
5	5	
$\sum$	22	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. (a) Zeigen und interpretieren Sie die Identität ${}_tp_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{t+k}p_x \cdot q_{x+t+k}$, mit $t, x \geq 0$. (4 Pkt.)

   (b) Die Weibullverteilung mit Parametern $\beta, \lambda > 0$ ist gegeben durch $F(y) = 1 - \exp(-(\lambda y)^{\beta})$, für alle $y \geq 0$. Zeigen Sie, dass F_x für $x = 0$ im Modell von Weibull (d.h. wenn $\mu_{t+x} = k(x+t)^n$ mit $k, n > 0$) eine Weibullverteilung besitzt. Gilt diese Aussage auch für $x > 0$?

2. (a) Eine x-jährige Person schließt eine n-jährige gemischte Versicherung mit Versicherungssumme S Euro ab. Die Prämien werden jährlich vorschüssig bezahlt. Weiters fallen anfängliche Kosten in der Höhe von 3% der Versicherungssumme plus 20% der ersten Prämie an. Laufende Kosten betragen 2% der Prämie ab dem zweiten Jahr. Im Todesfall während der ersten n Jahre wird die Summe am Ende des Todesjahres ausbezahlt, ansonsten nach Ablauf der n Jahre. Der Zinssatz sei i. (6 Pkt.)

      (i) Geben Sie eine Formel für den Verlust (inklusive Kosten) L des Versicherers an?

      (ii) Geben Sie eine Formel für die jährliche Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip an. Drücken Sie alle vorkommenden Größen mit Hilfe von Variablen aus, die in der Sterbetafel vorkommen.

      (iii) Geben Sie eine Formel für die Standardabweichung von L mit Hilfe von L_k an, wobei L_k den Verlust für $K_x = k$ bezeichnet.

   (b) Betrachten Sie folgende Erlebensversicherung: Versicherungssumme S, Dauer n, Anfangsalter x und Zinssatz i. Die Abschlusskosten seien K.

      (i) Geben Sie eine Formel für den Verlust (inklusive Kosten) L des Versicherers an?

      (ii) Geben Sie eine Formel für die jährliche vorschüssig gezahlte Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip an. Drücken Sie alle vorkommenden Größen mit Hilfe von Variablen aus, die in der Sterbetafel vorkommen.

      (iii) Geben Sie eine Formel für das ausreichende Deckungskapital zum Zeitpunkt $k < n$ an. Nimmt das Deckungskapital immer positive Werte an?

3. (a) Was versteht man unter dem prospektiven und retrospektiven Nettodeckungskapital? (4 Pkt.)

   (b) Geben Sie die prospektive und retrospektive Form des Nettodeckungskapitals einer n-jährigen Ablebensversicherung einer x-jährigen Person bei jährlicher, vorschüssiger Prämienzahlung während der Versicherungsdauer an. Skizzieren Sie den Verlauf des Deckungskapitals.

4. Bei einer *geometrisch wachsenden Leibrente* steigt der jährlich ausgezahlte Betrag jedes Jahr um einen konstanten Faktor $c > 1$ an. Zeigen Sie dazu Folgendes: (3 Pkt.)

   (a) Die NEP dieser Leibrente entspricht immer der NEP $\ddot{a}_x(\tilde{i})$ einer gewöhnlichen Leibrente, allerdings mit einem vom ursprünglichen Zinssatz i verschiedenen Zinssatz $\tilde{i}$.

(b) Berechnen Sie $\tilde{i}$ in Abhängigkeit von i und c.

(c) Für welches c entspricht die NEP genau $\mathbb{E}[K_x] + 1$?

5. (a) Was versteht man unter einer garantierten Annuitätsoption? (5 Pkt.)

(b) Zeigen Sie, dass der Marktwert einer garantierten Annuitätsoption zur Zeit $T > 0$ gegeben ist durch

$$V^{\mathrm{GAO}}(T) = 1 + \left(\sum_{n=0}^{\omega - x} p(T, T+n)\, {}_n p_x\, r_x^{\mathrm{G}} - 1 \right)^{+},$$

wobei r_x^{G} die garantierte Rate, ω das maximale Lebensalter sowie $p(T, T+n)$ der Preis eines Zero-Coupon Bonds mit Maturität $T+n$ zur Zeit T ist.

(c) Zur Erinnerung: Der Marktwert eines N-Receiver Swaps zur Zeit $T \geq 0$, bei dem während $N > 0$ Jahren die variable LIBOR Rate gegen eine fixe Rate K_N getauscht wird, ist gegeben durch

$$\left(\sum_{n=1}^{N-1} p(T, T+n)\, K_N + p(T, T+N)\,(1 + K_N) \right) - 1.$$

Replizieren Sie für die Zeitpunkte $T + (\omega - x)$ und $T + (\omega - x - 1)$ die garantierte Annuität mit $(\omega - x)$-Receiver Swaps sowie $(\omega - x - 1)$-Receiver Swaps zu entsprechenden Raten $K^{\omega - x}$ und $K^{\omega - x - 1}$.