Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Lebensversicherungsmathematik
(Vorlesungsprüfung)
3. März 2014
Prof. Thorsten Rheinländer

90 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: ein handbeschriebener DIN-A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-10511
email: sandra@fam.tuwien.ac.at

Bsp.	Max.	Punkte
1	4	
2	6	
3	4	
4	3	
5	5	
$\sum$	22	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. (a) Es sei für $0 \leq x < 120$ und $0 \leq t \leq 120 - x$ die Überlebenswahrscheinlichkeit definiert durch (4 Pkt.)

$$ {}_t p_x := \frac{120 - x - t}{120 - x} \, . $$

i. Bestimmen Sie allgemein μ_{x+t}, für $0 \leq x < 120$ und $0 \leq t \leq 120 - x$.

ii. Bestimmen Sie weiters die Standardabweichung der Restlebenszeit $T(x)$, für $0 \leq x \leq 120$.

(b) Die Gompertz−Makehamverteilung mit Parametern $\alpha, \beta, \lambda > 0$ ist gegeben durch $F(y) = 1 - \exp(-\lambda y - \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta y} - 1))$, für alle $y \geq 0$. Zeigen Sie, dass F_x im Modell von Gompertz−Makeham (d.h. wenn $\mu_{t+x} = A + Bc^{x+t}$ mit $A, B > 0$ und $c > 1$) eine Gompertz−Makehamverteilung besitzt.

2. (a) Eine x-jährige Person schließt eine n-jährige gemischte Versicherung mit Versicherungssumme S Euro ab. Die Prämien werden jährlich vorschüssig bezahlt. Weiters fallen anfängliche Kosten in der Höhe von 2% der Versicherungssumme plus 10% der ersten Prämie an. Laufende Kosten betragen 1% der Prämie ab dem zweiten Jahr. Im Todesfall während der ersten n Jahre wird die Summe am Ende des Todesjahres ausbezahlt, ansonsten nach Ablauf der n Jahre. Der Zinssatz sei i. (6 Pkt.)

(i) Geben Sie eine Formel für den Verlust (inklusive Kosten) L des Versicherers an.

(ii) Geben Sie eine Formel für die jährliche Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip an. Drücken Sie alle vorkommenden Größen mit Hilfe von Variablen aus, die in der Sterbetafel vorkommen.

(iii) Geben Sie eine Formel für die Standardabweichung von L mit Hilfe von L_k an, wobei L_k den Verlust für $K_x = k$ bezeichnet.

(b) Betrachten Sie folgende Ablebensversicherung: Versicherungssumme S, Dauer n, Anfangsalter x und Zinssatz i. Die Abschlusskosten seien K und die Prämie wird in Form einer Einmalprämie bezahlt.

(i) Geben Sie eine Formel für den Verlust (inklusive Kosten) L des Versicherers an.

(ii) Geben Sie eine Formel für die Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip an. Drücken Sie alle vorkommenden Größen mit Hilfe von Variablen aus, die in der Sterbetafel vorkommen.

(iii) Geben Sie eine Formel für das ausreichende Deckungskapital zum Zeitpunkt $k < n$ an. Nimmt das Deckungskapital immer positive Werte an?

3. (a) Was versteht man unter dem prospektiven und retrospektiven Nettodeckungskapital? (4 Pkt.)

(b) Geben Sie die prospektive und retrospektive Form des Nettodeckungskapitals einer n-jährigen Erlebensversicherung einer x-jährigen Person bei jährlicher, vorschüssiger Prämienzahlung während der Versicherungsdauer an. Skizzieren Sie den Verlauf des Deckungskapitals.

4. Betrachten Sie eine stetige Todesfallversicherung mit Sterblichkeitsintensität μ_x und beliebigem Zins i. Wenn ein Leben einem zusätzlichen Risiko ausgesetzt ist, erhöht man die Sterblichkeitsintensität um eine additive Konstante $c > 0$: $\mu'_x = \mu_x + c$. Es bezeichne $\bar{A}'_x$ die Nettoeinmalprämie dieser Versicherung mit Risikozuschlag. Zeigen Sie, dass ein Zins $j \in \mathbb{R}$ existiert, sodass (3 Pkt.)

$$\bar{A}'_x = \bar{A}^j_x + c\bar{a}^j_x, \quad x \geq 0,$$

wobei $\bar{A}^j_x$ und $\bar{a}^j_x$ Nettoeinmalprämie einer stetigen Ablebensversicherung bzw. einer stetigen Leibrente mit Zins j und ohne Risikozuschlag sind.

5. (a) Was versteht man unter einem Zero Coupon Bond und unter einem Zinsswaps? (5 Pkt.)

   (b) Für Coupon Bonds mit Nominale 100 Einheiten und jährlichen gleichbleibenden Coupons von 5 Einheiten haben wir zu unterschiedlichen Maturitäten $1 \leq n \leq 5$ die Preise $\mathbf{CB}_n(0)$ gegeben: $\mathbf{CB}_1(0) = 99$, $\mathbf{CB}_2(0) = 95$, $\mathbf{CB}_3(0) = 101$, $\mathbf{CB}_4(0) = 103$ und $\mathbf{CB}_5(0) = 100$. Ein solcher Bond zahlt am Ende jedes Jahres den Coupon und zur Maturität den Coupon mit der Nominale gemeinsam aus.

      i. Berechnen Sie damit die Zero Coupon Preise $p(0, n)$, für $1 \leq n \leq 5$.

      ii. Berechnen Sie die *Swap Rate* S_0 für einen 5-jährigen *Receiver Swap* mit jährlichen Zahlungen.