

Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

**Lebensversicherungsmathematik**  
**(Vorlesungsprüfung)**  
**16. Mai 2014**  
**Prof. Thorsten Rheinländer**

90 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: ein handbeschriebener DIN-A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,  
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-10511  
email: sandra@fam.tuwien.ac.at

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	6	
3	4	
4	3	
5	5	
$\Sigma$	23	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

**Gesamtnote:**

1. (a) Für gegebenes  $x > 0$  und gegebene Sterbeintensität  $\mu_t$ ,  $t > 0$  sei  $q_x = 0.04$ . (5 Pkt.)  
Wenn die Sterbeintensität jedoch stets  $\mu_t + c$  beträgt, dann ist  $q_x = 0.09$ .  
Berechnen Sie  $c$ .
- (b) Zeigen Sie: Ist  $\mu_x$  eine monoton wachsende Funktion, dann ist  $E(T_x)$  monoton fallend in  $x$ .
- (c) Die Gompertz–Makehamverteilung mit Parametern  $\alpha, \beta, \lambda > 0$  ist gegeben durch  $F(y) = 1 - \exp(-\lambda y - \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta y} - 1))$ , für alle  $y \geq 0$ . Zeigen Sie, dass  $F_x$  im Modell von Gompertz–Makeham (d.h. wenn  $\mu_{t+x} = A + Bc^{x+t}$  mit  $A, B > 0$  und  $c > 1$ ) eine Gompertz–Makehamverteilung besitzt.
2. (a) Eine  $x$ -jährige Person schließt eine  $n$ -jährige gemischte Versicherung mit Versicherungssumme  $S$  Euro ab. Die Prämien werden jährlich vorschüssig bezahlt. Weiters fallen anfängliche Kosten in der Höhe von 3% der Versicherungssumme plus 20% der ersten Prämie an. Laufende Kosten betragen 2% der Prämie ab dem zweiten Jahr. Im Todesfall während der ersten  $n$  Jahre wird die Summe am Ende des Todesjahres ausbezahlt, ansonsten nach Ablauf der  $n$  Jahre. Der Zinssatz sei  $i$ . (6 Pkt.)
- (i) Geben Sie eine Formel für den Verlust (inklusive Kosten)  $L$  des Versicherers an.
- (ii) Geben Sie eine Formel für die jährliche Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip an. Drücken Sie alle vorkommenden Größen mit Hilfe von Variablen aus, die in der Sterbetafel vorkommen.
- (iii) Geben Sie eine Formel für die Standardabweichung von  $L$  mit Hilfe von  $L_k$  an, wobei  $L_k$  den Verlust für  $K_x = k$  bezeichnet.
- (b) Betrachten Sie folgende Erlebensversicherung: Versicherungssumme  $S$ , Dauer  $n$ , Anfangsalter  $x$  und Zinssatz  $i$ . Die Abschlusskosten seien  $K$ .
- (i) Geben Sie eine Formel für den Verlust (inklusive Kosten)  $L$  des Versicherers an.
- (ii) Geben Sie eine Formel für die jährliche vorschüssig gezahlte Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip an. Drücken Sie alle vorkommenden Größen mit Hilfe von Variablen aus, die in der Sterbetafel vorkommen.
- (iii) Geben Sie eine Formel für das ausreichende Deckungskapital zum Zeitpunkt  $k < n$  an.
3. (a) Was versteht man unter dem prospektiven und retrospektiven Nettodeckungskapital? (4 Pkt.)
- (b) Geben Sie die prospektive und retrospektive Form des Nettodeckungskapitals einer  $n$ -jährigen Ablebensversicherung einer  $x$ -jährigen Person bei jährlicher, vorschüssiger Prämienzahlung während der Versicherungsdauer an. Skizzieren Sie den Verlauf des Deckungskapitals.

4. Betrachten Sie eine Ablebensversicherung an eine  $x$ -jährige Person über einen Betrag von 100000. Prämien werden über 20 Jahre zu Jahresbeginn gezahlt, die Versicherungssumme am Ende des Todesjahres. Zusätzlich besteht eine Prämienrückgewähr, welche die Hälfte der letzten Prämienzahlung als zusätzliche Zahlung im Todesfall während der Prämienlaufzeit auszahlt. Zeigen Sie, dass die jährliche Nettoprämie folgendermaßen aussieht: (3 Pkt.)

$$\frac{100000 A_x}{\left(1 + \frac{d}{2}\right) \ddot{a}_{x:\overline{20}|} - \frac{1-v^{20}}{2} {}_{20}p_x}.$$

5. (a) Was versteht man unter einem Zero Coupon Bond und unter einem Zinsswap? (5 Pkt.)
- (b) Für Coupon Bonds mit Nominale 100 Einheiten und jährlichen gleichbleibenden Coupons von 5 Einheiten haben wir zu unterschiedlichen Maturitäten  $1 \leq n \leq 5$  die Preise  $\mathbf{CB}_n(0)$  gegeben:  $\mathbf{CB}_1(0) = 99$ ,  $\mathbf{CB}_2(0) = 95$ ,  $\mathbf{CB}_3(0) = 101$ ,  $\mathbf{CB}_4(0) = 103$  und  $\mathbf{CB}_5(0) = 100$ . Ein solcher Bond zahlt am Ende jedes Jahres den Coupon und zur Maturität den Coupon mit der Nominale gemeinsam aus.
- i. Berechnen Sie damit die Zero Coupon Preise  $p(0, n)$ , für  $1 \leq n \leq 5$ .
  - ii. Berechnen Sie die *Swap Rate*  $S_0$  für einen 5-jährigen *Receiver Swap* mit jährlichen Zahlungen.