Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Lebensversicherungsmathematik
(Vorlesungsprüfung)
30. September 2014
Prof. Thorsten Rheinländer

90 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: ein handbeschriebener DIN-A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,
Sandra Trenovatz, Tel. 01-58801-10511
email: sandra@fam.tuwien.ac.at

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	6	
3	4	
4	3	
5	3	
$\sum$	21	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. (a) Gegeben seien zwei Personen A und B, die zum gleichen Zeitpunkt geboren werden und zu gewissen, voneinander unabhängigen Zeitpunkten T_A und T_B (mit Dichten g_A, g_B und Verteilungsfunktionen G_A, G_B) sterben. Die Sterbeintensität μ_t^A von A ist (z.B. durch unterschiedlichen Lebenswandel) stets das c-fache der Sterbeintensität μ_t^B von B. (5 Pkt.)

   (i) Zeigen Sie, dass $1 - G_A = (1 - G_B)^c$ gilt.

   (ii) Folgern Sie daraus, dass $g_A = c g_B (1 - G_B)^{c-1}$ gilt.

   (b) Bei einer *geometrisch wachsenden Leibrente* steigt der jährlich ausgezahlte Betrag jedes Jahr um einen konstanten Faktor $c > 1$ an. Zeigen Sie dazu Folgendes:

   (i) Die NEP dieser Leibrente entspricht immer der NEP $\ddot{a}_x(\tilde{i})$ einer gewöhnlichen Leibrente, allerdings mit einem vom ursprünglichen Zinssatz i verschiedenen Zinssatz $\tilde{i}$.

   (ii) Berechnen Sie $\tilde{i}$ in Abhängigkeit von i und c.

   (iii) Für welches c entspricht die NEP genau $\mathbb{E}[K_x] + 1$?

2. (a) Eine x-jährige Person schließt eine n-jährige gemischte Versicherung mit Versicherungssumme S Euro ab. Die Prämien werden jährlich vorschüssig bezahlt. Weiters fallen anfängliche Kosten in der Höhe von 2% der Versicherungssumme plus 10% der ersten Prämie an. Laufende Kosten betragen 1% der Prämie ab dem zweiten Jahr. Im Todesfall während der ersten n Jahre wird die Summe am Ende des Todesjahres ausbezahlt, ansonsten nach Ablauf der n Jahre. Der Zinssatz sei i. (6 Pkt.)

   (i) Geben Sie eine Formel für den Verlust (inklusive Kosten) L des Versicherers an.

   (ii) Geben Sie eine Formel für die jährliche Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip an. Drücken Sie alle vorkommenden Größen mit Hilfe von Variablen aus, die in der Sterbetafel vorkommen.

   (iii) Geben Sie eine Formel für die Standardabweichung von L mit Hilfe von L_k an, wobei L_k den Verlust für $K_x = k$ bezeichnet.

   (b) Betrachten Sie folgende Ablebensversicherung: Versicherungssumme S, Dauer n, Anfangsalter x und Zinssatz i. Die Abschlusskosten seien K und die Prämie wird in Form einer Einmalprämie bezahlt.

   (i) Geben Sie eine Formel für den Verlust (inklusive Kosten) L des Versicherers an.

   (ii) Geben Sie eine Formel für die Bruttoprämie nach dem Äquivalenzprinzip an. Drücken Sie alle vorkommenden Größen mit Hilfe von Variablen aus, die in der Sterbetafel vorkommen.

   (iii) Geben Sie eine Formel für das ausreichende Deckungskapital zum Zeitpunkt $k < n$ an.

3. (a) Was versteht man unter dem prospektiven und retrospektiven Nettodeckungskapital? (4 Pkt.)

   (b) Geben Sie die prospektive und retrospektive Form des Nettodeckungskapitals einer n-jährigen Erlebensversicherung einer x-jährigen Person bei jährlicher, vorschüssiger Prämienzahlung während der Versicherungsdauer an. Skizzieren Sie den Verlauf des Deckungskapitals.

4. Betrachten Sie eine stetige Todesfallversicherung mit Sterblichkeitsintensität μ_x und beliebigem Zins i. Wenn ein Leben einem zusätzlichen Risiko ausgesetzt ist, erhöht man die Sterblichkeitsintensität um eine additive Konstante $c > 0$: $\mu'_x = \mu_x + c$. Es bezeichne $\bar{A}'_x$ die Nettoeinmalprämie dieser Versicherung mit Risikozuschlag. Zeigen Sie, dass ein Zins $j \in \mathbb{R}$ existiert, sodass (3 Pkt.)

$$\bar{A}'_x = \bar{A}^j_x + c\bar{a}^j_x, \quad x \geq 0,$$

wobei $\bar{A}^j_x$ und $\bar{a}^j_x$ Nettoeinmalprämie einer stetigen Ablebensversicherung bzw. einer stetigen Leibrente mit Zins j und ohne Risikozuschlag sind.

5. (a) Was versteht man unter einer garantierten Annuitätsoption? (3 Pkt.)

   (b) Zeigen Sie, dass der Marktwert einer garantierten Annuitätsoption zur Zeit $T > 0$ durch

$$V^{\text{GAO}}(T) = 1 + \left(\sum_{n=0}^{\omega - x} p(T, T+n)\, {}_n p_x r^{\text{G}}_x - 1 \right)^+$$

   gegeben ist, wobei r^{G}_x die garantierte Rate, ω das maximale Lebensalter sowie $p(T, T+n)$ der Preis eines Zero-Coupon Bonds mit Maturität $T+n$ zur Zeit T ist.