1. Es seien $K_Z$ die Kapitalfunktion bei zusammengesetzter, sowie

$$K_K(t) = \frac{(1+r)^{\lfloor t \rfloor + 1}}{1 + r(1 - (t - \lfloor t \rfloor))}$$

die Kapitalfunktion bei *kaufmännischer Verzinsung*.
Zeigen Sie: Bei kontinuierlicher Verzinsung gilt

   (a) $K_Z(\lfloor t \rfloor) \leq K_K(t) \leq K_Z(t)$

   (b) $K_Z(t) - K_K(t) = (\delta - d)t + O(t^2) \quad (t \to 0)$

   Wiederholen Sie vor der Lösung die $O$-Notation. Verständnisfrage: Was passiert bei kaufmännischer Verzinsung in Worten?

2. Gegeben sei die Kapitalfunktion

$$C(t) = C(0)\left(\prod_{k=1}^{\lfloor t \rfloor}(1 + r_k)\right) \cdot (1 + r_{\lfloor t \rfloor + 1})^{t - \lfloor t \rfloor}$$

mit variierenden Zinssätzen $r_k$.

   (a) Berechnen Sie den durchschnittlichen effektiven Jahresaufzinsungsfaktor $(1+r)$ für einen Zeitraum $[0, t]$.

   (b) Berechnen Sie den Endwert einer Einmalzahlung von 3 000 nach 5 Jahren bzw. nach $2\frac{1}{4}$ Jahren bei $r_1 = 0.03$, $r_2 = 0.035$, $r_3 = 0.045$, $r_4 = 0.055$, $r_5 = 0.065$.

3. Betrachten Sie

$$C(t) = C(0)e^{\int_0^t \delta(s)ds} + \int_0^t e^{\int_s^t \delta(u)du} c(s)ds \tag{1}$$

als verallgemeinertes und kontinuierliches Analogon von

$$C_n = (1+i)^n C_0 + \sum_{t=1}^{n} (1+r)^{n-t} c_t. \tag{2}$$

Nun ist in (1) sowohl die Zuzahlungs- als auch die Zinsintensität zeitabhängig, wohingegen in (2) nur die Zuzahlungen, nicht aber die Zinsen von der Zeit abhängen. Erläuteren Sie die Variablen in den obigen Formeln, die Bedeutung der Formeln und finden Sie eine Verallgemeinerung von (2), bei der auch die Zinsen zeitabhängig sein können. In dieser Aufgabe soll $r_t$ die Zinsrate für das Jahr $t$ bedeuten. (Vorsicht: Oft bezeichnet $r_t$ den nominellen Zinssatz bei $t$-tel jährlicher Verzinsung.)

4. Berechnen Sie die Barwerte

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|}, a_{\overline{\infty}|}, \ddot{a}^{(m)}_{\overline{\infty}|}, a^{(m)}_{\overline{\infty}|}, \bar{a}_{\overline{\infty}|}$$

für $r = 0.03$, $r = 0.05$, $r = 0.06$ und $m = 2, 6, 12$.