1. Die Zufallsvariable Y sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$ (Schreibweise $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$), d.h. die Dichte sei gegeben durch $f(y) = \lambda \exp(-\lambda y) 1_{[0,\infty)}(y)$, für alle $y \in \mathbb{R}$.
   (a) Zeige, dass $\mathbf{P}[Y > c + t \mid Y > c] = \mathbf{P}[Y > t]$ gilt, für alle $c \geq 0$.
   (b) Berechne $\mathbf{E}[Y]$ und $\mathrm{Var}(Y)$.
   (c) Die in (a) gezeigte Eigenschaft wird auch als *Gedächtnislosigkeit* bezeichnet. Zeige, dass (außer der Diracverteilung in 0, die als Grenzfall der Exponentialverteilung für $\lambda \to \infty$ gesehen werden kann) die Exponentialverteilung die einzige gedächtnislose Verteilung ist. Genauer: Ist Z eine Zufallsvariable auf $[0, \infty)$, sodass $\mathbf{P}[Y > c + t \mid Y > c] = \mathbf{P}[Y > t]$ gilt für alle $c \geq 0$, dann gilt $Z \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ für irgendein $\lambda \in [0, \infty]$.
2. Die Weibullverteilung mit Parametern $\beta, \lambda > 0$ ist gegeben durch $F(y) = 1 - \exp(-(\lambda y)^\beta)$, für alle $y \geq 0$. Weiters ist die Gompertz−Makehamverteilung mit Parametern $\alpha, \beta, \lambda > 0$ gegeben durch $F(y) = 1 - \exp(-\lambda y - \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta y} - 1))$, für alle $y \geq 0$.
   (a) Welchen Zusammenhang zwischen Exponentialverteilung und Weibullverteilung gibt es?
   (b) Zeige, dass F_x für $x = 0$ im Modell von Weibull (d.h. wenn $\mu_{t+x} = k(x+t)^n$ mit $k, n > 0$) eine Weibullverteilung besitzt. Gilt diese Aussage auch für $x > 0$?
   (c) Zeige, dass F_x im Modell von Gompertz−Makeham (d.h. wenn $\mu_{t+x} = A + Bc^{x+t}$ mit $A, B, c > 0$) eine Gompertz−Makehamverteilung besitzt.
3. Gegeben seien zwei Personen A und B, die zum gleichen Zeitpunkt geboren werden und zu gewissen, voneinander unabhängigen Zeitpunkten T_A und T_B (mit Dichten g_A, g_B und Verteilungsfunktionen G_A, G_B) sterben. Die Sterbeintensität μ_t^A von A ist (z.B. durch unterschiedlichen Lebenswandel) stets das c-fache der Sterbeintensität μ_t^B von B.
   (a) Zeige, dass $1 - G_A = (1 - G_B)^c$ gilt.
   (b) Folgere daraus, dass $g_A = c g_B (1 - G_B)^{c-1}$ gilt.
   (c) Was gilt für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die zukünftige Lebensdauer von A die von B übersteigt (also $\mathbf{P}(T_B < T_A)$)?
4. Es sei für $0 \leq x < 120$ und $0 \leq t \leq 120 - x$ die Überlebenswahrscheinlichkeit definiert durch
   $$ {}_tp_x := \frac{120 - x - t}{120 - x}. $$
   (a) Bestimme allgemein μ_{x+t}, für $0 \leq x < 120$ und $0 \leq t \leq 120 - x$.
   (b) Bestimme $\mathbf{E}[T_{55}]$.
   (c) Bestimme weiters die Standardabweichung der Restlebenszeit $T(x)$, für $0 \leq x \leq 120$.

5. (a) Zeige und interpretiere die Identit"at ${}_tp_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{t+k}p_x \cdot q_{x+t+k}$, mit $t, x \geq 0$.

   (b) Zeige die Rekursion $e_x = p_x(1 + e_{x+1})$, mit $x \geq 0$.

6. (a) Für gegebenes $x > 0$ und gegebene Sterbeintensität μ_t, $t > 0$ sei $q_x = 0.04$.

   Wenn die Sterbeintensität jedoch stets $\mu_t + c$ beträgt, dann ist $q_x = 0.09$. Berechne c.

7. Zeige: Ist μ_x eine monoton wachsende Funktion, dann ist $E(T_x)$ monoton fallend in x.