Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

# Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
# (Vorlesungsprüfung)
# 2. Maerz 2015
# Christa Cuchiero

90 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: ein handbeschriebener DIN-A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Informationen zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

---

| Bsp. | Max. | Punkte |
|---|---|---|
| 1 | 12 | |
| 2 | 12 | |
| 3 | 12 | |
| $\sum$ | 36 | |

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

**Gesamtnote:**

1. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut $S^0$ und einem riskanten Finanzgut $S^1$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dabei sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\{\omega_i\}) > 0$ für $i \in \{1, \ldots, 4\}$. Außerdem sei die Filtration im Finanzmarktmodell durch $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1^1)$ und $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1^1, S_2^1)$ gegeben. (12 Pkt.)

$$\begin{tikzcd}
S_0^0 = 1 \arrow[r] & S_1^0 = \frac{9}{8} \arrow[r] & S_2^0 = \frac{7}{6}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2^1(\omega_1) = 35 \\
 & S_1^1(\omega_{1,2}) = 27 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0^1 = 16 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2^1(\omega_{2,3}) = 21 \\
 & S_1^1(\omega_{3,4}) = 9 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2^1(\omega_4) = 7
\end{tikzcd}$$

(i) Definieren Sie Arbitragefreiheit in diesem Finanzmarktmodell und formulieren Sie das “Fundamental Theorem of Asset Pricing” um den Zusammenhang zu Martingalmaßen zu erläutern.

(ii) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße $P^*$ im obigen Finanzmarktmodell. Identifizieren Sie dabei $P^*$ mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = P^*(\{\omega_i\})$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(iii) Betrachten Sie eine Lookback-Call-Option auf das Wertpapier $S^1$ und bewerten Sie diese indem Sie einen (nicht diskontierten) Preisprozess $(C_t)_{t \in \{0,1,2\}}$ angegeben, sodass das erweiterte Finanzmarktmodell arbitragefrei ist. Der Payoff $C_2$ dieser Option ist durch

$$C_2 = S_2^1 - \min_{t \in \{0,1,2\}} S_t^1$$

gegeben.

2. Betrachten Sie folgendes Einperiodenmodell $(S^0, S^1)$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dabei sei das risikolose Wertpapier durch $S_0^0 = S_0^1 = 1$ und das risikante Wertpapier durch $S_0^1 = 1$ und (12 Pkt.)

$$S_1^1 = Z, \quad \text{mit} \quad Z \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \quad \text{und} \quad \lambda > 0,$$

gegeben, wobei $\mathrm{Exp}(\lambda)$ die Exponentialverteilung bezeichnet (mit Dichte $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$ und 0 sonst.)

(i) Definieren Sie zuerst ein riskoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß. Für welche Parameter $\lambda$ ist $P$ risikoneutral?

(ii) Von nun an sei $Z \sim \mathrm{Exp}(2)$ unter $P$. Ist der Markt arbitragefrei?

(iii) Definieren Sie die Vollständigkeit eines Finanzmarktmodells. Formulieren Sie einen aus der Vorlesung bekannten Satz, der die Vollständigkeit eines Finanzmarktmodells mittels risikoneutralen Maßen charakterisiert. Ist das hier betrachtete Einperiodenmodell vollständig?

(iv) Gibt es ein zu $P$ (wobei $Z \sim \mathrm{Exp}(2)$ unter $P$) äquivalentes Maß $P^*_{b,p}$ sodass $Z \sim \gamma(b,p)$ mit $b,p > 0$, wobei $\gamma(b,p)$ die Gammaverteilung bezeichnet (mit Dichte $f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}$ für $x \geq 0$ und 0 sonst.) Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn ja für welche Parameter $b,p$ ist $P^*_{b,p}$ risikoneutral? (Hinweis: Der Erwartungswert einer Gamma-verteilten Zufallsvariable ist $\frac{p}{b}$.)

3. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut $B$ und einem riskanten Finanzgut $X$. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(X_1, X_2) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1,2,3,4\}$. (12 Pkt.)

$$
\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = 1 \arrow[r] & B_2 = 1 \\
 & & X_2(\omega_1) = 16 \\
 & X_1(\omega_{1,2}) = 8 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
X_0 = 4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & X_2(\omega_{2,3}) = 4 \\
 & X_1(\omega_{3,4}) = 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & X_2(\omega_4) = 1
\end{tikzcd}
$$

(i) Bestimmen Sie das äquivalente Martingalmaß $P^*$.

(ii) Geben Sie zunächst allgemein die Definition der Snell-Einhüllenden eines nichtnegativen adaptierten Prozesses $(H_t)_{t \in \{0,\dots,T\}}$ mit $T \in \mathbb{N}$ an. Berechnen Sie diese weiters unter dem Martingalmaß $P^*$ im obigen Finanzmarktmodell für eine amerikanische Butterfly Option mit Payoff

$$H_t = (X_t - 2)^+ - 2(X_t - 10)^+ + (X_t - 18)^+, \quad t \in \{0,1,2\}.$$

(iii) Definieren Sie die minimale optimale Stoppzeit $\tau_{\min}$ und berechnen Sie diese für den gegebenen Claim $H$ im obigen Finanzmarktmodell.

(iv) Stimmt im obigen Finanzmarktmodell der Preisprozess der amerikanischen Butterfly Option mit dem der europäischen überein? Begründen Sie!