Technische Universität Wien
Finanz- und Versicherungsmathematik

Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle — SS 2012

Übungsblatt 10

1. Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein Messraum, $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ eine Filtration, $\tau\colon \Omega \to \{0, ..., T\}$ eine Stoppzeit und $(H_t)_{t=0,\dots,T}$ ein adaptierter Prozess.
   Die Zufallsvariable H_τ sei definiert durch $H_\tau(\omega) := H_{\tau(\omega)}(\omega), \omega \in \Omega$.
   Zeige, dass H_τ bzgl. $\mathcal{F}_\tau$ messbar ist.

2. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ eine Filtration, τ, σ Stoppzeiten und $(H_t)_{t=0,\dots,T}$ ein adaptierter Prozess mit $H_t \in L^1(\mathbb{P})$ für $t = 0, ..., T$.
   Zeige, dass für alle $t = 0, ..., T$ gilt:
   $$\mathbb{E}[H_\sigma|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}[H_\sigma|\mathcal{F}_t] \quad \mathbb{P}\text{-f.s. auf } \{\tau = t\}$$
   (d.h. zeige $\mathbb{E}[H_\sigma|\mathcal{F}_\tau]\mathbb{1}_{\{\tau=t\}} = \mathbb{E}[H_\sigma|\mathcal{F}_t]\mathbb{1}_{\{\tau=t\}} \quad \mathbb{P}$-f.s.)
   Hinweis: Benutze die Definition des bedingten Erwartungswertes. Zeige zuerst, dass $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_\tau$ und dass für jedes $A \in \mathcal{F}_t$ auch $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{F}_\tau$.
   Zeige nun, dass $\mathbb{E}[H_\sigma \mathbb{1}_{\{\tau=t\}}\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[H_\sigma \mathbb{1}_{\{\tau=t\}}|\mathcal{F}_\tau]\mathbb{1}_A]$ für alle $A \in \mathcal{F}_t$.

3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,T}$ eine Filtration, τ eine Stoppzeit und $(U_t)_{t=0,\dots,T}$ ein adaptierter Prozess mit $U_t \in L^1(\mathbb{P})$ für $t = 0, ..., T$.
   Sei $U = M - A$ die Doob-Zerlegung von U.
   Zeige, dass $U^\tau = M^\tau - A^\tau$ die Doob-Zerlegung von U^τ ist.

Einige Bemerkungen zu Amerikanische Optionen

In den folgenden Beispielen sollen amerikanische Claims, deren Bepreisung und optimale Ausübungsstrategien besprochen werden. Der große Unterschied zu europäischen Claims besteht darin, dass der Besitzer eines amerikanischen Claims C diesen zu jeder Zeit $t \in \{0, ..., T\}$ ausüben kann.
Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Snell-Einhüllende $U = (U_t)_{\{0,...,T\}}$ das kleinste Supermartingal ist, das den Claim $C = (C_t)_{\{0,...,T\}}$ dominiert, d.h. $U_t \leq C_t$ für $t = 0, ..., T$. Der Preis eines amerikanischen Claims zur Zeit $t \in \{0, ..., T\}$ ist gerade U_t.
Zur **Berechnung der Snell-Einhüllenden** geht man rekursiv vor: $U_T := C_T$ und $U_t := \max\{C_t, \mathbb{E}^*[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]\}$ für $t = 0, ..., T-1$.
Um eine **optimale Stoppzeit** τ für einen amerikanischen Claim C zu ermitteln, muss man sich den ersten Zeitpunkt $t \in \{0, ..., T\}$ suchen, sodass $U_t = C_t$ gilt (diese Stoppzeit wäre gerade τ_{min}). Dieser „optimale" Zeitpunkt ist natürlich abhängig vom Ereignis $\omega \in \Omega$ bzw. vom Verlauf der Aktie.

Bemerkung. Betrachte das folgende Modell mit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(C_1)$ und $\mathcal{F}_2 = \sigma(C_1, C_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$.

$$\begin{tikzcd}
 & & C_2(\omega_1) = c_1 \\
 & C_1(\omega_{1,2}) = b_1 \arrow[ur, "q_1"] \arrow[dr, "1-q_1"] & \\
C_0 = a \arrow[ur] \arrow[dr] & & C_2(\omega_{2,3}) = c_2 \\
 & C_1(\omega_{3,4}) = b_2 \arrow[ur, "q_2"] \arrow[dr, "1-q_2"] & \\
 & & C_2(\omega_4) = c_3
\end{tikzcd}$$

In diesem Beispiel berechnet man die $\mathcal{F}_1$-messbare Zufallsvariable $\mathbb{E}[C_2|\mathcal{F}_1]$ folgendermaßen:

$$\mathbb{E}[C_2|\mathcal{F}_1](\omega_{1,2}) = c_1 \cdot q_1 + c_2 \cdot (1 - q_1)$$
$$\mathbb{E}[C_2|\mathcal{F}_1](\omega_{3,4}) = c_2 \cdot q_2 + c_3 \cdot (1 - q_2)$$

4. Betrachte das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ für $i = 1, ..., 4$.

$$
\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = 1 \arrow[r] & B_2 = 1 \\
 & & S_2(\omega_1) = 9 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 8 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 5 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 6 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 4 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 3
\end{tikzcd}
$$

Betrachte den amerikanischen Claim C, der gegeben ist durch $C_0 = 1$, $C_1(\omega_{1,2}) = 4$, $C_1(\omega_{3,4}) = 0$, $C_2(\omega_1) = 4$, $C_2(\omega_{2,3}) = 1$ und $C_2(\omega_4) = 0$.

(i) Berechne das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$.

(ii) Berechne die Snell-Einhüllende $U_t, t = 0, 1, 2$, für den Claim.

(iii) Berechne eine optimale Stoppzeit τ, d.h. bestimme $\tau(\omega_i), i = 1, ..., 4$.

5. Betrachte das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ für $i = 1, ..., 4$. Betrachte den amerikanischen Claim C.

$$
\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{9}{8} \arrow[r] & B_2 = \frac{81}{64} \\
 & & \begin{array}{c} S_2(\omega_1) = 10530/64 \\ C_2(\omega_1) = 0 \end{array} \\
 & \begin{array}{c} S_1(\omega_{1,2} = 1026/8 \\ C_1(\omega_{3,4}) = 0 \end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\begin{array}{c} S_0 = 100 \\ C_0 = 10 \end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{array}{c} S_2(\omega_{2,3}) = 7938/64 \\ C_2(\omega_{2,3}) = 405/64 \end{array} \\
 & \begin{array}{c} S_1(\omega_{3,4}) = 774/8 \\ C_2(\omega_{3,4}) = 180/8 \end{array} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \begin{array}{c} S_2(\omega_4) = 5994/64 \\ C_2(\omega_4) = 2430/64 \end{array}
\end{tikzcd}
$$

(i) Berechne das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$.

Hinweis: Beachte, dass unter $\mathbb{P}^*$ nur S ein Martingal sein muss. C hingegen ist i.A. kein Martingal unter $\mathbb{P}^*$.

(ii) Berechne den Preisprozess des Claims, d.h. die Snell-Einhüllende U.

(iii) Berechne eine optimale Stoppzeit τ.

6. In einem Binomialmodell mit $u = 2, d = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{3}, S_0 = 1$ und $T = 3$ betrachte einen amerikanischen Put mit Fälligkeit $T = 3$ und Strike $K = \frac{1}{2}$.

   (i) Berechne das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$.

   (ii) Berechne den Preisprozess des Claims.

   (iii) Berechne eine optimale Stoppzeit τ.

   Hinweis: Fertige eine Skizze des Modells an.

7. Gegeben sei ein vollständiges Mehrperiodenmodell mit $T \in \mathbb{N}$ und dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$. Sei $C = (C_t)_{t=0,\ldots,T}$ ein amerikanischer Claim.

   (i) Ist C ein $\mathbb{Q}$-Submartingal, dann ist die optimale Stoppzeit $\tau \equiv T$.

   (ii) Ist C ein $\mathbb{Q}$-Supermartingal, dann ist die optimale Stoppzeit $\tau \equiv 0$.

   Hinweis: Definition der optimalen Stoppzeit und Optional-Sampling-Theorem.