

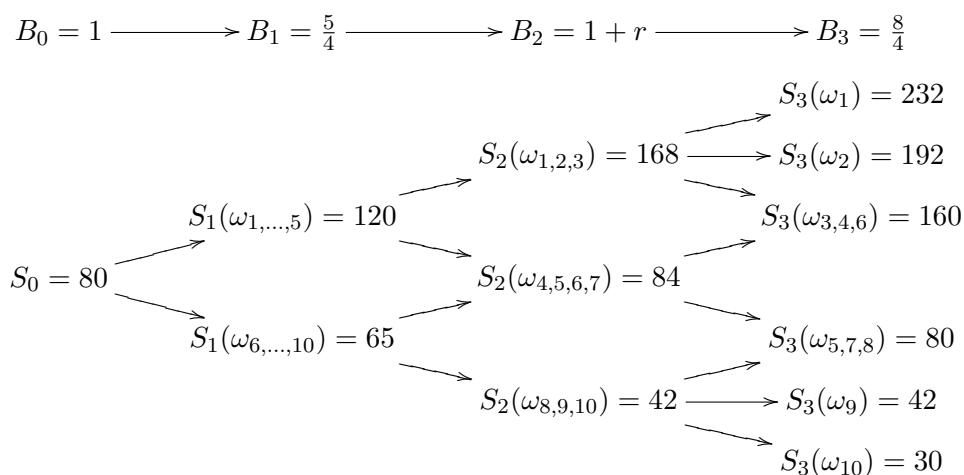


Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle

Übungsblatt 11

SS 2012

- Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ mit $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, 2$. Betrachte ein Einperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut $\pi^0 = 1, S^0 = 1 + r$ und einem riskanten Finanzgut $\pi^1 = 1, S^1(\omega_1) = 1, S^1(\omega_2) = 2$.
 - Charakterisiere diejenigen Zinsraten r , für die das Modell arbitragefrei ist.
 - Berechne für jede arbitragefreie Zinsrate r die Menge aller äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{P}(r)$.
 - Ist das Modell vollständig?
 - Berechne alle arbitragefreien Preise $\pi^C(r)$ (als Funktion der arbitragefreien Zinsrate r) einer Call-Option mit Strikepreis 1.5.
- Betrachte das folgende Dreiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S . Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{10}\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$, $\mathcal{F}_3 = \sigma(S_1, S_2, S_3)$ und $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, \dots, 10$.



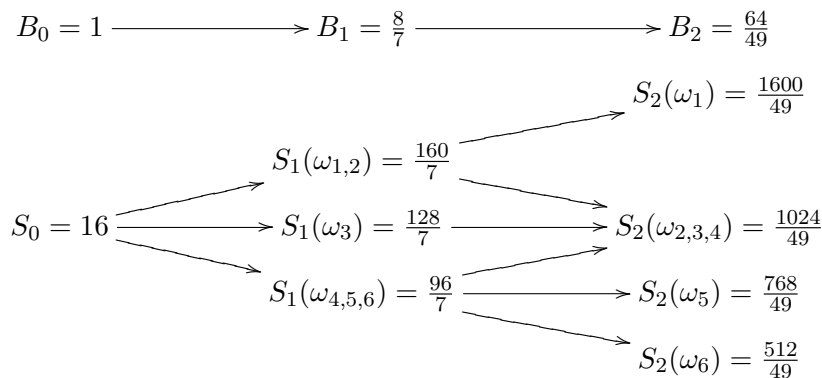
- Sei $r = 1/2$. Ist das Modell arbitragefrei? Falls ja, berechne die Menge aller äquivalenten Martingalmaße \mathcal{P} . Falls nein, gib eine Arbitragemöglichkeit $\xi = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ an.
- Sei $r = 3/4$. Ist das Modell arbitragefrei? Falls ja, berechne die Menge aller äquivalenten Martingalmaße \mathcal{P} . Falls nein, gib eine Arbitragemöglichkeit $\xi = (\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$ an.
- Im arbitragefreien Fall berechne den arbitragefreien Preis bzw. die Menge aller arbitragefreien Preise einer Call-Option mit Strikepreis $K = 88$.

3. Gegeben sei ein Binomialmodell mit $r = 0.02, u = 1.05, d = 0.96, S_0 = 1200$ und $B_0 = 1$. Betrachte einen Claim C mit Fälligkeit $T = 12$ und Auszahlung

$$C^{bf} = \begin{cases} S_T - 900, & 900 \leq S_T \leq 1000 \\ 100, & 1000 \leq S_T \leq 1100 \\ 1100 - S_T, & 1100 \leq S_T \leq 1200 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei Z die Anzahl der „guten Tage“ (Aufwärtsschritte von S) bis T . Dann ist $S_T(\omega) = S_0 u^{Z(\omega)} d^{T-Z(\omega)}, \omega \in \Omega$.

- Berechne für einen Zeitschritt die risikoneutrale (bedingte) Wahrscheinlichkeit für einen Aufwärtsschritt.
 - Für welche Werte von Z wird der Claim ausgeübt?
 - Berechne den arbitragefreien Preis des Claims zur Zeit $t = 0$.
4. Betrachte das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S . Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6\}, \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \mathcal{F}_1 = \sigma(S_1), \mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, \dots, 6$.



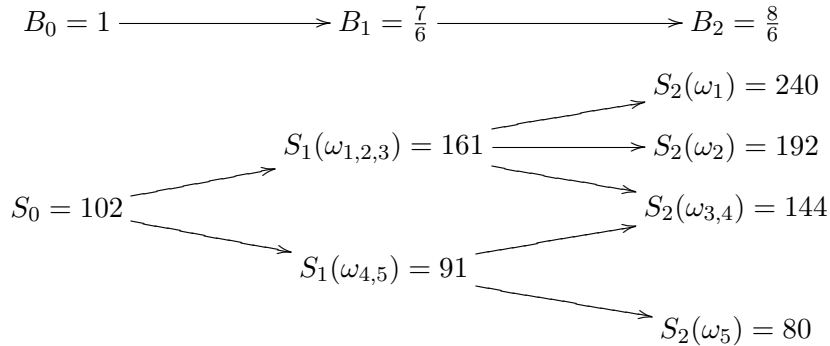
- Prüfe, ob der (B, S) -Markt arbitragefrei und/oder vollständig ist.
- Der (B, S) -Markt wird um eine Put-Option mit Strikepreis $K = \frac{576}{49}$ und Fälligkeit $T = 2$ erweitert, wobei der Preisprozess der Put-Option durch

$$P_0 = 1/12, \quad P_1(\omega_{4,5,6}) = 1/4, \quad P_1(\omega_{1,2,3}) = 0, \quad P_2 = (K - S_2)_+$$

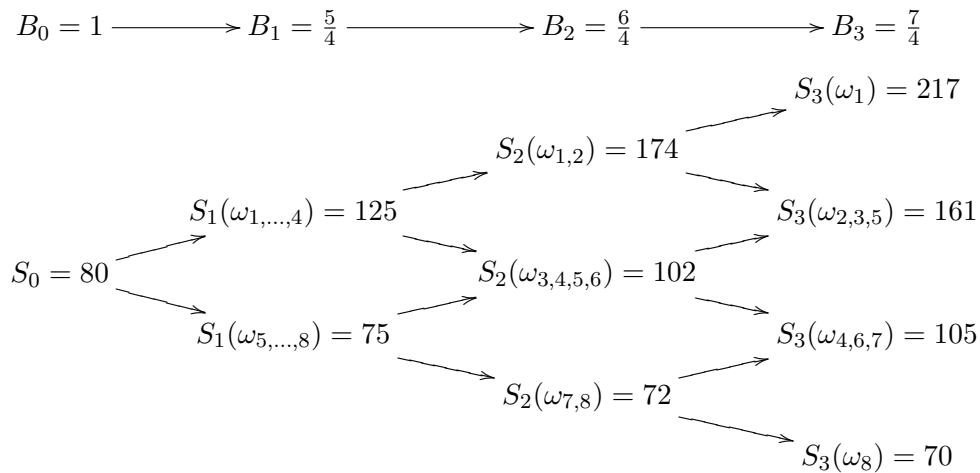
gegeben ist. Berechne die Menge aller äquivalenten Martingalmaße für das erweiterte (B, S, P) -Modell.

- Berechne den arbitragefreien Preis einer up-and-out Barrier-Option $C = (S_2 - K)_+ \cdot \mathbf{1}_{\{\max_k S_k < H\}}$ mit $H = 22$ und $K = \frac{832}{49}$ im (B, S, P) -Modell.

5. Betrachte ein Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S . Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$ und $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, \dots, 5$.



- (i) Bestimme die Menge aller äquivalenten Martingalmaße.
- (ii) Finde eine selbstfinanzierende replizierende Strategie für den Claim C mit $C(\omega_1) = 24, C(\omega_2) = 16, C(\omega_3) = 8, C(\omega_4) = 0$ und $C(\omega_5) = -16$.
- (iii) Berechne mit Hilfe der replizierenden Strategie den arbitragefreien Preis von C .
6. Gegeben sei das folgende Dreiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S . Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$, $\mathcal{F}_3 = \sigma(S_1, S_2, S_3)$ und $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, \dots, 8$. Betrachte die amerikanische Butterfly-Option $C^b f$ mit Auszahlung $C^b f_t = (K - |S_t - M|)_+$ mit $K = 20$ und $M = 90$ für $t = 0, 1, 2, 3$.



- (i) Berechne das äquivalente Martingalmaß \mathbb{P}^* .
- (ii) Berechne den Preisprozess des Claims.
- (iii) Berechne die optimale Stoppzeit τ_{\min} .