Technische Universität Wien
Finanz- und Versicherungsmathematik

Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle SS 2012
Übungsblatt 11

1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ mit $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, 2$. Betrachte ein Einperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut $\pi^0 = 1, S^0 = 1 + r$ und einem riskanten Finanzgut $\pi^1 = 1, S^1(\omega_1) = 1, S^1(\omega_2) = 2$.

   (i) Charakterisiere diejenigen Zinsraten r, für die das Modell arbitragefrei ist.

   (ii) Berechne für jede arbitragefreie Zinsrate r die Menge aller äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{P}(r)$.

   (iii) Ist das Modell vollständig?

   (iv) Berechne alle arbitragefreien Preise $\pi^C(r)$ (als Funktion der arbitragefreien Zinsrate r) einer Call-Option mit Strikepreis 1.5.

2. Betrachte das folgende Dreiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{10}\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$, $\mathcal{F}_3 = \sigma(S_1, S_2, S_3)$ und $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, ..., 10$.

$$B_0 = 1 \longrightarrow B_1 = \tfrac{5}{4} \longrightarrow B_2 = 1 + r \longrightarrow B_3 = \tfrac{8}{4}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & S_3(\omega_1) = 232 \\
 & & S_2(\omega_{1,2,3}) = 168 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_3(\omega_2) = 192 \\
 & S_1(\omega_{1,...,5}) = 120 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_3(\omega_{3,4,6}) = 160 \\
S_0 = 80 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{4,5,6,7}) = 84 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_1(\omega_{6,...,10}) = 65 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_3(\omega_{5,7,8}) = 80 \\
 & & S_2(\omega_{8,9,10}) = 42 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_3(\omega_9) = 42 \\
 & & & S_3(\omega_{10}) = 30
\end{tikzcd}$$

   (i) Sei $r = 1/2$. Ist das Modell arbitragefrei? Falls ja, berechne die Menge aller äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{P}$. Falls nein, gib eine Arbitragemöglichkeit $\xi = (\overline{\xi_1}, \overline{\xi_2}, \overline{\xi_3})$ an.

   (ii) Sei $r = 3/4$. Ist das Modell arbitragefrei? Falls ja, berechne die Menge aller äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{P}$. Falls nein, gib eine Arbitragemöglichkeit $\xi = (\overline{\xi_1}, \overline{\xi_2}, \overline{\xi_3})$ an.

   (iii) Im arbitragefreien Fall berechne den arbitragefreien Preis bzw. die Menge aller arbitragefreien Preise einer Call-Option mit Strikepreis $K = 88$.

3. Gegeben sei ein Binomialmodell mit $r = 0.02, u = 1.05, d = 0.96, S_0 = 1200$ und $B_0 = 1$. Betrachte einen Claim C mit Fälligkeit $T = 12$ und Auszahlung

$$C^{bf} = \begin{cases} S_T - 900, & 900 \leq S_T \leq 1000 \\ 100, & 1000 \leq S_T \leq 1100 \\ 1100 - S_T, & 1100 \leq S_T \leq 1200 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Sei Z die Anzahl der „guten Tage“ (Aufwärtsschritte von S) bis T. Dann ist $S_T(\omega) = S_0 u^{Z(\omega)} d^{T-Z(\omega)}, \omega \in \Omega$.

(i) Berechne für einen Zeitschritt die risikoneutrale (bedingte) Wahrscheinlichkeit für einen Aufwärtsschritt.

(ii) Für welche Werte von Z wird der Claim ausgeübt?

(iii) Berechne den arbitragefreien Preis des Claims zur Zeit $t = 0$.

4. Betrachte das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, ..., 6$.

$$\begin{tikzcd} B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{8}{7} \arrow[r] & B_2 = \frac{64}{49} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = \frac{1600}{49} \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = \frac{160}{7} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 16 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_1(\omega_3) = \frac{128}{7} \arrow[r] & S_2(\omega_{2,3,4}) = \frac{1024}{49} \\
 & S_1(\omega_{4,5,6}) = \frac{96}{7} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_2(\omega_5) = \frac{768}{49} \\
 & & S_2(\omega_6) = \frac{512}{49}
\end{tikzcd}$$

(i) Prüfe, ob der (B, S)-Markt arbitragefrei und/oder vollständig ist.

(ii) Der (B, S)-Markt wird um eine Put-Option mit Strikepreis $K = \frac{576}{49}$ und Fälligkeit $T = 2$ erweitert, wobei der Preisprozess der Put-Option durch

$$P_0 = 1/12, \quad P_1(\omega_{4,5,6}) = 1/4, P_1(\omega_{1,2,3}) = 0, \quad P_2 = (K - S_2)_+$$

gegeben ist. Berechne die Menge aller äquivalenten Martingalmaße für das erweiterte (B, S, P)-Modell.

(iii) Berechne den arbitragefreien Preis einer up-and-out Barrier-Option $C = (S_2 - K)_+ \cdot \mathbb{1}_{\{\max_k S_k < H\}}$ mit $H = 22$ und $K = \frac{832}{49}$ im (B, S, P)-Modell.

5. Betrachte ein Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1), \mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$ und $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, ..., 5$.

$$
\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{7}{6} \arrow[r] & B_2 = \frac{8}{6}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 240 \\
 & S_1(\omega_{1,2,3}) = 161 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_2(\omega_2) = 192 \\
S_0 = 102 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{3,4}) = 144 \\
 & S_1(\omega_{4,5}) = 91 \arrow[ur] \arrow[ddr] & \\
 & & \\
 & & S_2(\omega_5) = 80
\end{tikzcd}
$$

(i) Bestimme die Menge aller äquivalenten Martingalmaße.

(ii) Finde eine selbstfinanzierende replizierende Strategie für den Claim C mit $C(\omega_1) = 24, C(\omega_2) = 16, C(\omega_3) = 8, C(\omega_4) = 0$ und $C(\omega_5) = -16$.

(iii) Berechne mit Hilfe der replizierenden Strategie den arbitragefreien Preis von C.

6. Gegeben sei das folgende Dreiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_8\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$, $\mathcal{F}_3 = \sigma(S_1, S_2, S_3)$ und $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, ..., 8$.
Betrachte die amerikanische Butterfly-Option $C^b f$ mit Auszahlung $C^b f_t = (K - |S_t - M|)_+$ mit $K = 20$ und $M = 90$ für $t = 0, 1, 2, 3$.

$$
\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{5}{4} \arrow[r] & B_2 = \frac{6}{4} \arrow[r] & B_3 = \frac{7}{4}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & S_3(\omega_1) = 217 \\
 & & S_2(\omega_{1,2}) = 174 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_1(\omega_{1,...,4}) = 125 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_3(\omega_{2,3,5}) = 161 \\
S_0 = 80 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{3,4,5,6}) = 102 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_1(\omega_{5,...,8}) = 75 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_3(\omega_{4,6,7}) = 105 \\
 & & S_2(\omega_{7,8}) = 72 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & S_3(\omega_8) = 70
\end{tikzcd}
$$

(i) Berechne das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{P}^*$.

(ii) Berechne den Preisprozess des Claims.

(iii) Berechne die optimale Stoppzeit $\tau_{\min}$.