Technische Universität Wien
Finanz- und Versicherungsmathematik

Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle SS 2012

Übungsblatt 2

1. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ mit $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, 2, 3$. Betrachte ein Einperiodenmodell mit dem Preisvektor

$$\overline{\pi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

zum Zeitpunkt $t = 0$ und

$$\overline{S}(\omega_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \overline{S}(\omega_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overline{S}(\omega_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

zum Zeitpunkt $t = 1$.
Finde eine Arbitragemöglichkeit.

2. Betrachte ein Einperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut. Sei $(1, \pi)$ der Preisvektor zum Zeitpunkt $t = 0$ und $(1 + r, S)$ der Preisvektor zum Zeitpunkt $t = 1$.
Ω sei eine endliche Menge, $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0, \omega \in \Omega$.
Definiere $a := \min_{\omega \in \Omega} S(\omega)$ und $b := \max_{\omega \in \Omega} S(\omega)$. Außerdem gelte $a < b$.
Zeige: In diesem Modell gibt es genau dann keine Arbitrage, wenn $a < \pi(1 + r) < b$ gilt. (Zeige die Aussage ohne Verwendung des FTAP.)
Hinweis: Finde eine Arbitragemöglichkeit, wenn $a \geq \pi(1 + r)$ bzw. wenn $b \leq \pi(1 + r)$.

3. Betrachte ein Einperiodenmodell mit $d + 1$ Finanzgütern. Zeige:

   (i) Wenn es Arbitrage gibt, dann existiert eine Arbitragemöglichkeit $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $\overline{\pi} \cdot \overline{\xi} = 0$.

   (ii) Existiert eine Arbitragemöglichkeit $\overline{\eta} \in \mathbb{R}^{d+1}$ mit $\overline{\pi} \cdot \overline{\eta} < 0$ und $\overline{S} \cdot \overline{\eta} \geq 0$ $\mathbb{P}$-f.s, dann gibt es Arbitrage.

Im Folgenden soll die Proposition A.1. bewiesen werden, die beim Beweis des FTAP verwendet wurde. Die folgenden beiden Beispiele dienen zur Vorbereitung für den eigentlichen Beweis. Die Aussage von Proposition A.1. soll dann im Beispiel 6 gezeigt werden.

4. Sei $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^k$ eine nichtleere, konvexe Teilmenge mit $0 \notin \overline{\mathcal{C}}$. Zeige:

   (i) Der Abschluss $\overline{\mathcal{C}}$ von $\mathcal{C}$ ist konvex.

   (ii) Es existiert ein $y \in \mathbb{R}^k$, sodass $\inf_{x \in \mathcal{C}} (x, y)_{\mathbb{R}^k} > 0$. Insbesondere kann $\|y\| = 1$ gewählt werden.
   Hinweis: Verwenden Sie den Trennungssatz von Hahn-Banach mit den Mengen $\overline{\mathcal{C}}$ und $\{0\}$.

5. Sei $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^k$ eine nichtleere, konvexe Teilmenge mit $0 \notin \mathcal{C}$, aber $0 \in \overline{\mathcal{C}}$, sodass die lineare Hülle $[\mathcal{C}] = \mathbb{R}^k$ ist. Sei $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ eine maximale, linear unabhängige Menge.

   (i) Sei $z := -\sum_{i=1}^k e_i$. Zeige $z \notin \overline{\mathcal{C}}$.

   Hinweis: Führe den Beweis indirekt durch. Nimm an, dass $z \in \overline{\mathcal{C}}$ gilt. Wähle eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}$, die gegen z konvergiert, $z_n = \sum_{i=1}^k \lambda_n^i e_i$ für gewisse $\lambda_n^i \in \mathbb{R}$. Für einen gewissen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ sind alle $\lambda_{n_0}^i$ negativ. Betrachte dann die Konvexkombination $\alpha_0 z_{n_0} + \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_k e_k$ mit

   $$\alpha_0 = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^n \lambda_{n_0}^i} \quad \textit{und} \quad \alpha_j = \frac{-\lambda_{n_0}^j}{1 - \sum_{i=1}^n \lambda_{n_0}^i} \quad \textit{für } j = 1, ..., k.$$

   (ii) Zeige, dass eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^k$ existiert, sodass $z_n \notin \overline{\mathcal{C}}, n \in \mathbb{N}$, und $z_n \to 0$.

6. Sei $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^k$ eine nichtleere, konvexe Teilmenge mit $0 \notin \mathcal{C}$. Beweise, dass ein $y \in \mathbb{R}^k$ existiert, sodass $(x, y)_{\mathbb{R}^k} \geq 0$ und $(x_0, y)_{\mathbb{R}^k} > 0$ für ein $x_0 \in \mathcal{C}$.

   Hinweis: Man kann oBdA annehmen, dass die lineare Hülle $[\mathcal{C}] = \mathbb{R}^k$ ist. Für den Fall $0 \in \overline{\mathcal{C}}$ wähle eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in Beispiel 5.(ii). Wende Beispiel 4 auf die Menge $\mathcal{C} - z_n := \{x - z_n : x \in \mathcal{C}\}$ an und erhalte daraus normierte $y_n \in \mathbb{R}^k$ wie in 4.(ii). $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge in $T := \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| = 1\}$. Verwende die Kompaktheit von T, um ein $y \in T$ zu erhalten, dass die gewünschten Eigenschaften erfüllt.

Folgende Resultate aus der Funktionalanalysis können zur Lösung der Beispiele verwendet werden:

Trennungssatz von Hahn-Banach. Sei H ein Hilbertraum, $A \subseteq H$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge, $B \subseteq X$ eine nichtleere, kompakte, konvexe Menge und seien A und B disjunkt.
Dann existiert ein stetiges, lineares Funktional $f : H \to \mathbb{R}$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$, sodass

$$\sup_{a \in A} f(a) < \gamma < \inf_{b \in B} f(b).$$

Satz von Riesz. Sei H ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(.,.)_H$ und sei f ein stetiges, lineares Funktional auf H.
Dann existiert ein eindeutiges $y \in H$, sodass $f = (.,y)_H$ gilt, d.h. $f(x) = (x,y)_H$ für alle $x \in H$.