Technische Universität Wien
Finanz- und Versicherungsmathematik

# Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle SS 2012
## Übungsblatt 3

1. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{P}^*$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Radon-Nikodym-Dichte $Z := \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}$.

   (i) Zeige, dass $\mathbb{P}^*$ genau dann zu $\mathbb{P}$ äquivalent ist, wenn $Z > 0$ $\mathbb{P}$-f.s.

   (ii) Gelte $\mathbb{P} \approx \mathbb{P}^*$. Zeige, dass eine Arbitrage bzgl. $\mathbb{P}$ auch eine Arbitrage bzgl. $\mathbb{P}^*$ ist.

2. Gegeben sei ein arbitragefreies Einperiodenmodell mit $d+1$ Finanzgütern ($d \geq 2$). Dabei sei $\pi = (\pi_0, \pi_1, ..., \pi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ der Vektor der Preise zum Zeitpunkt $t = 0$ und $S = (S_0, S_1, ..., S_d)$ der Zufallsvektor der Preise zum Zeitpunkt $t = 1$, definiert auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
   Zusätzlich gelte $\pi_i > 0, \mathbb{P}[S_i > 0] = 1$, und $\pi_j > 0, \mathbb{P}[S_j > 0] = 1$, für zwei Indizes $i, j \in \{1, ..., d\}$.
   Sei $\mathbb{P}^*$ das risikoneutrale Maß bzgl. des risikolosen Finanzguts, $\mathbb{P}^i$ das risikoneutrale Maß bzgl. des $i$-ten Finanzguts und $\mathbb{P}^j$ das risikoneutrale Maß bzgl. des $j$-ten Finanzguts. Das bedeutet:

   - $\mathbb{P}^* \approx \mathbb{P}$ und $\mathbb{E}^*[\frac{S_k}{1+r}] = \pi_k$ für $k = 0, 1, ...d$.
   - $\mathbb{P}^i \approx \mathbb{P}$ und $\mathbb{E}^i[\frac{S_k}{S_i}] = \frac{\pi_k}{\pi_i}$ für $k = 0, 1, ..., d$
   - $\mathbb{P}^j \approx \mathbb{P}$ und $\mathbb{E}^j[\frac{S_k}{S_j}] = \frac{\pi_k}{\pi_j}$ für $k = 0, 1, ..., d$

   Zeige, dass für die Radon-Nikodym-Ableitung bei Numeraire-Wechsel Folgendes gilt:

   $$\frac{d\mathbb{P}^i}{d\mathbb{P}^j} = \frac{\pi_j S_i}{\pi_i S_j}$$

3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, 2, 3$. Betrachte ein Einperiodenmodell mit dem Preisvektor

   $$\overline{\pi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

   zum Zeitpunkt $t = 0$ und

   $$\overline{S}(\omega_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \overline{S}(\omega_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overline{S}(\omega_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

   zum Zeitpunkt $t = 1$.
   Zeige, dass es keine Arbitrage gibt, und bestimme alle risikoneutralen Maße.

4. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, 2, 3$. Betrachte ein Einperiodenmodell mit dem Preisvektor

$$\overline{\pi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

zum Zeitpunkt $t = 0$ und

$$\overline{S}(\omega_1) = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad \overline{S}(\omega_2) = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 40 \end{pmatrix}, \quad \overline{S}(\omega_3) = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 60 \end{pmatrix}$$

zum Zeitpunkt $t = 1$.
Zeige, dass es keine Arbitrage gibt, und bestimme alle risikoneutralen Maße.

5. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, 2, 3$. Betrachte ein Einperiodenmodell mit $\pi_0 = 1, S_0 = 1 + r$ und

$$\pi_1 = 3, \quad S_1(\omega_1) = 1, \quad S_1(\omega_2) = 2, \quad S_1(\omega_3) = 3.$$

   (i) Bestimme diejenigen Zinsraten $r > -1$, für die das Modell arbitragefrei ist.
   (ii) Für alle anderen $r > -1$ gib eine Arbitragemöglichkeit $\overline{\xi} = (\xi_0, \xi_1) \in \mathbb{R}^2$ an.

6. Sei $S$ ein Finanzderivat in einem Finanzmarkt, $\pi(S)$ sein Preis zur Zeit $t = 0$ und $0 < K \leq \pi(S)$.

   (i) Zeichne den Payoff einer Put-Option $[C_{put} = (K - S)_+]$, einer Call-Option $[C_{call} = (S - K)_+]$, eines Straddles $[C_{str} = |S - \pi(S)|]$ und eines Butterfly-Spreads $[C_{bf} = (K - |S - \pi(S)|)_+]$ als Funktion vom Underlying $S$.
   (ii) Stelle den Payoff eines Straddles bzw. eines Butterfly-Spreads einmal als Kombination von Call-Optionen und einmal als Kombination von Put-Optionen dar.