Technische Universität Wien
Finanz- und Versicherungsmathematik

Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle SS 2012
Übungsblatt 4

1. Zeige, dass die Menge $\Pi(C)$ der arbitragefreien Preise eines Claims konvex und daher ein Intervall ist.

2. In einem arbitragefreien Finanzmarktmodell bezeichne $\pi_{\inf}(C)$ die untere Arbitrageschranke eines Claims C. Sei $Y = \frac{S}{1+r} - \pi$ der Vektor der diskontierten Nettogewinne.
   Beweise die folgende Darstellung:
$$\pi_{\inf}(C) = \sup\left\{ m \in [0,\infty) \middle| \, \exists \xi \in \mathbb{R}^d: \quad m + \xi \cdot Y \leq \frac{C}{1+r} \;\; \mathbb{P}\text{-f.s.} \right\}$$

3. Mit Hilfe des vorigen Beispiels beweise:
$$\pi_{\inf}(C) = \sup\left\{ \overline{\xi} \cdot \overline{\pi} | \; \overline{\xi} \cdot \overline{S} \leq C \;\; \mathbb{P}\text{-f.s.} \right\}$$

4. Gegeben sei ein Finanzmarktmodell bestehend aus einem risikolosen Finanzgut mit $\pi_0 = 100$, $S_0 = 120$, und einem riskanten Finanzgut mit $\pi_1 = 100$ und $\mathbb{P}[S_1 = 140] = \mathbb{P}[S_1 = 90] = \frac{1}{2}$.
   (i) Zeige, dass der Markt vollständig ist.

   Betrachte einen Butterfly-Spread mit Auszahlung $C = (K - |V - \pi(V)|)_+$, wobei $K > 0$ und $V = \overline{\xi} \cdot \overline{S}$ der Wert eines Portfolios $\overline{\xi} = (\xi_0, \xi_1)$ mit arbitragefreiem Preis $\pi(V) > K$ ist.

   (ii) Wähle das Portfolio $\overline{\xi} = (1, 2)$ und $K = 30$. Berechne den arbitragefreien Preis von C.
   (iii) Finde eine replizierende Strategie für C.

5. Betrachte folgende Finanzmarktmodelle:
   (a) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ mit $r = \frac{1}{9}$ und einem riskanten Finanzgut mit
$$\pi_1 = 5, \quad S_1(\omega_1) = \frac{20}{3}, \quad S_1(\omega_2) = \frac{49}{9}$$
   (b) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $r = \frac{1}{9}$ und einem riskanten Finanzgut mit
$$\pi_1 = 5, \quad S_1(\omega_1) = \frac{20}{3}, \quad S_1(\omega_2) = \frac{49}{9}, \quad S_1(\omega_3) = \frac{10}{3}$$

(c) $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ mit $r = \frac{1}{9}$ und zwei riskanten Finanzgütern mit

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_1) = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ \frac{40}{3} \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_2) = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} \\ \frac{80}{9} \end{pmatrix}, \quad S_1(\omega_3) = \begin{pmatrix} \frac{40}{9} \\ \frac{80}{9} \end{pmatrix}$$

Das zum jeweiligen Modell gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ solle außerdem $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0, \omega \in \Omega$, erfüllen.

(i) Welches dieser Modelle ist arbitragefrei? Für die arbitragefreien Modelle bestimme alle äquivalenten Martingalmaße. Für die restlichen Modelle finde eine Arbitragemöglichkeit.

(ii) Welche Modelle, die arbitragefrei sind, sind auch vollständig? Für die nicht-vollständigen Modelle finde einen nicht-erreichbaren Claim.

6. Betrachte ein Finanzmarktmodell auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{F} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = 0,7$. Das Finanzmarktmodell bestehe aus einem risikolosen Finanzgut mit $r = 0$ und einem riskanten Finanzgut mit $\pi_1 = 100$, $S_1(\omega_1) = 110$ und $S_1(\omega_2) = 70$. Sei C eine Call-Option auf S_1 mit Strikepreis $K = 90$. Berechne

   (i) eine replizierende Strategie für C,

   (ii) alle arbitragefreien Preise für C und alle äquivalenten Martingalmaße.

7. Sei $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_N\}, N \in \mathbb{N}$, versehen mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$, sodass $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0, \omega \in \Omega$, gilt.
   Auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum betrachte ein Finanzmarktmodell mit Zins $r = 0$ und einem riskanten Finanzgut mit $\pi_1 = 1$ und

$$0 < S_1(\omega_1) < S_1(\omega_2) < ... < S_1(\omega_N).$$

   Zeige, dass es Strikepreise $K_1, ..., K_{N-2} > 0$ und Preise $\pi^C(K_i)$ gibt, sodass die zugehörigen Call-Optionen $(S_1 - K_i)_+$ das Marktmodell vervollständigen. D.h. das Marktmodell, das mit den riskanten Finanzgütern $S_2, ..., S_{N-1}$ mit

$$\pi_i := \pi^C(K_{i-1}) \text{ und } S_i := (S_1 - K_{i-1})_+, \quad i = 2, ..., N-2,$$

   erweitert wurde, ist arbitragefrei und vollständig.