Technische Universität Wien
Finanz- und Versicherungsmathematik

Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle SS 2012
Übungsblatt 6

1. Für eine Zufallsvariable $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, d.h. $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, und eine Teil-σ-Albegra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ist die bedingte Varianz von X gegeben $\mathcal{G}$ definiert als

$$\mathbb{V}[X|\mathcal{G}] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}].$$

Zeige:

(i) $\mathbb{V}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] - (\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2$

(ii) $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{V}[X|\mathcal{G}]] + \mathbb{V}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]]$

2. Betrachte ein Mehrperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut S^0 und S^1. Sei $X_t := S_t^1/S_t^0$, $t = 0, ..., T$, der diskontierte Preisprozess des riskanten Finanzguts. Als Filtration verwende $\mathcal{F}_t := \sigma(X_0, X_1, ..., X_t)$, $t = 0, ..., T$. Definiere die Returns als

$$R_t := \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}, \quad t = 1, ..., T.$$

Zeige:

(i) $X_t = X_0 \prod_{k=1}^{t}(1 + R_k)$, $t = 0, ..., T$

(ii) Wenn $(R_t)_{t=1,...,T}$ eine Folge unabhängiger, integrierbarer Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[R_t] = 0$ ist, dann ist $X = (X_t)_{t=0,...,T}$ ein Martingal.

(iii) Gib ein Beispiel an, bei dem X ein Martingal ist, jedoch $(R_t)_{t=1,...,T}$ nicht unabhänigig ist.

3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ eine Zerlegung von Ω in paarweise disjunkte Ereignisse A_i, $i = 1, ..., n$. Sei $\mathcal{G} = \sigma(A_1, ..., A_n)$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$. Gib eine explizite Darstellung von $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ an.

4. Betrachte das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut S^0 und S^1. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_2 = \mathfrak{P}(\Omega)$.

$$\begin{tikzcd}
S_0^0 = 1 \arrow[r] & S_1^0 = 1 \arrow[r] & S_2^0 = 1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2^1(\omega_1) = 4 \\
 & S_1^1(\omega_{1,2}) = 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0^1 = 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2^1(\omega_{2,3}) = 1 \\
 & S_1^1(\omega_{3,4}) = 0.5 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2^1(\omega_4) = 0.25
\end{tikzcd}$$

Untersuche das Modell nach Arbitragemöglichkeiten!

5. Betrachte ein Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut S^0 und S^1. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$ und $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$.

$$\begin{tikzcd}
S_0^0 = 1 \arrow[r] & S_1^0 = \frac{5}{4} \arrow[r] & S_2^0 = \frac{25}{16}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2^1(\omega_1) = 160 \\
 & S_1^1(\omega_{1,2}) = 120 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0^1 = 100 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2^1(\omega_{2,3}) = 100 \\
 & S_1^1(\omega_{3,4}) = 90 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2^1(\omega_4) = 80
\end{tikzcd}$$

(i) Bestimme die Menge aller äquivalenten Martingalmaße!

(ii) Finde eine selbstfinanzierende replizierende Strategie für den Claim C mit $C(\omega_1) = 110$ und $C(\omega_2) = C(\omega_3) = C(\omega_4) = -10$.

6. Betrachte ein Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut S^0 und S^1. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$ und $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$

$$\begin{tikzcd}
S_0^0 = 1 \arrow[r] & S_1^0 = 1 \arrow[r] & S_2^0 = 1 \\
 & & S_2^1(\omega_1) = 4 \\
 & S_1^1(\omega_{1,2}) = 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0^1 = 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2^1(\omega_{2,3}) = 1 \\
 & S_1^1(\omega_{3,4}) = 0,5 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2^1(\omega_4) = 0,25
\end{tikzcd}$$

Die Auszahlung bei einer up-and-out Barrier-Option mit Strikepreis K und H ist gegeben durch $(S_2^1 - K)_+ \mathbb{1}_{\{\max_{k=0,1,2} S_k < H\}}$, d.h. die Auszahlung $(S_2^1 - K)_+$ zur Zeit $t = 2$ erfolgt nur dann, wenn S^1 die Barriere H nie überschreitet.
Berechne den arbitragefreien Preis der up-and-out Barrier-Option mit Strikepreis $K = 0,73$ und Barriere $H = 1,5$.