



Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle Übungsblatt 6

SS 2012

1. Für eine Zufallsvariable $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, d.h. $\mathbb{E}[X^2] < \infty$, und eine Teil- σ -Algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ist die bedingte Varianz von X gegeben \mathcal{G} definiert als

$$\mathbb{V}[X|\mathcal{G}] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}].$$

Zeige:

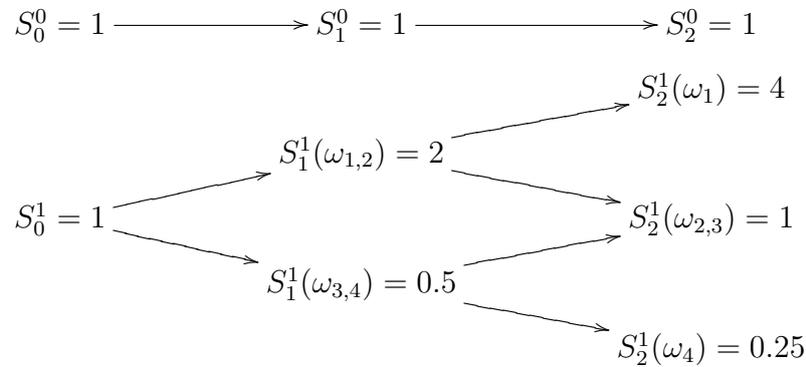
- (i) $\mathbb{V}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[X^2|\mathcal{G}] - (\mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2$
 - (ii) $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{V}[X|\mathcal{G}]] + \mathbb{V}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]]$
2. Betrachte ein Mehrperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut S^0 und S^1 . Sei $X_t := S_t^1/S_t^0$, $t = 0, \dots, T$, der diskontierte Preisprozess des riskanten Finanzguts. Als Filtration verwende $\mathcal{F}_t := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_t)$, $t = 0, \dots, T$. Definiere die Returns als

$$R_t := \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Zeige:

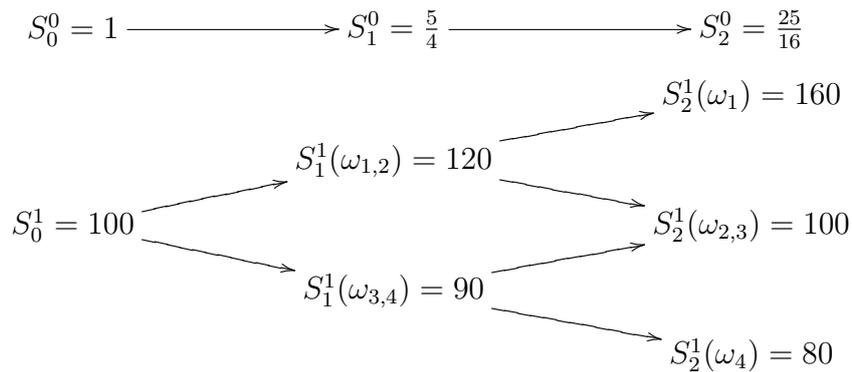
- (i) $X_t = X_0 \prod_{k=1}^t (1 + R_k)$, $t = 0, \dots, T$
 - (ii) Wenn $(R_t)_{t=1, \dots, T}$ eine Folge unabhängiger, integrierbarer Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[R_t] = 0$ ist, dann ist $X = (X_t)_{t=0, \dots, T}$ ein Martingal.
 - (iii) Gib ein Beispiel an, bei dem X ein Martingal ist, jedoch $(R_t)_{t=1, \dots, T}$ nicht unabhängig ist.
3. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei $\Omega = \bigcup_{i=1}^n A_i$ eine Zerlegung von Ω in paarweise disjunkte Ereignisse A_i , $i = 1, \dots, n$. Sei $\mathcal{G} = \sigma(A_1, \dots, A_n)$ eine Teil- σ -Algebra von \mathcal{F} . Gib eine explizite Darstellung von $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ an.

4. Betrachte das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut S^0 und S^1 . Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_2 = \mathfrak{P}(\Omega)$.



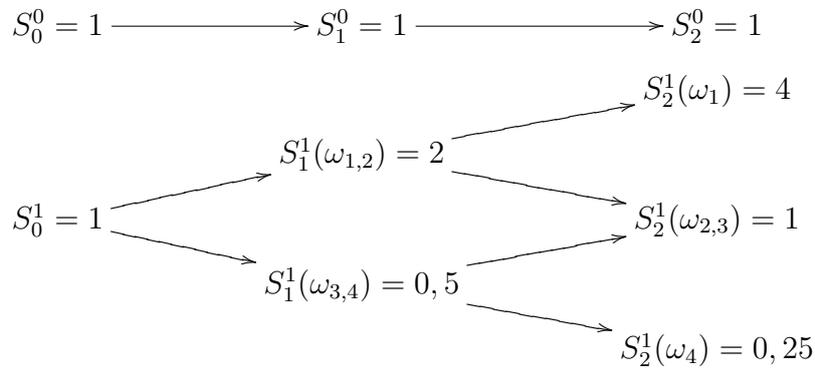
Untersuche das Modell nach Arbitragemöglichkeiten!

5. Betrachte ein Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut S^0 und S^1 . Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$ und $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$.



- (i) Bestimme die Menge aller äquivalenten Martingalmaße!
(ii) Finde eine selbstfinanzierende replizierende Strategie für den Claim C mit $C(\omega_1) = 110$ und $C(\omega_2) = C(\omega_3) = C(\omega_4) = -10$.

6. Betrachte ein Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut S^0 und S^1 . Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$ und $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$



Die Auszahlung bei einer up-and-out Barrier-Option mit Strikepreis K und H ist gegeben durch $(S_2^1 - K)_+ \mathbb{1}_{\{\max_{k=0,1,2} S_k < H\}}$, d.h. die Auszahlung $(S_2^1 - K)_+$ zur Zeit $t = 2$ erfolgt nur dann, wenn S^1 die Barriere H nie überschreitet.

Berechne den arbitragefreien Preis der up-and-out Barrier-Option mit Strikepreis $K = 0,73$ und Barriere $H = 1,5$.