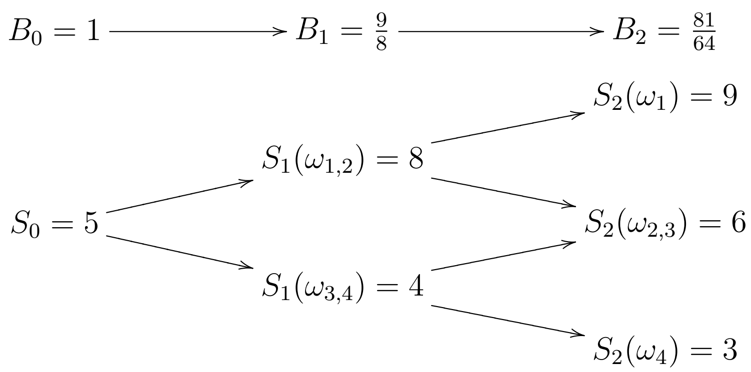
Technische Universität Wien
Finanz- und Versicherungsmathematik

Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle — SS 2012

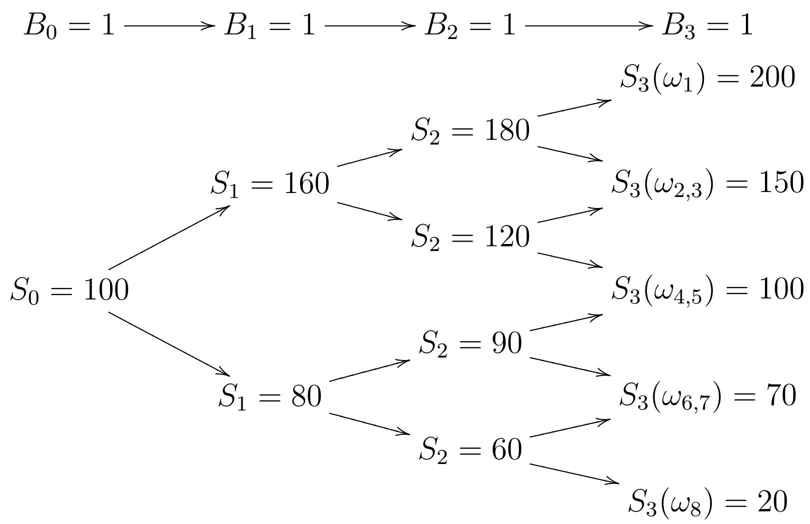
Übungsblatt 6

1. Betrachte das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$ und $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$.



   Untersuche das Modell nach Arbitragemöglichkeiten! Falls es keine Arbitrage gibt, finde ein äquivalentes Martingalmaß. Falls es Arbitrage gibt, finde eine Arbitragemöglichkeit!

2. Betrachte das folgende Dreiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_8\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$ und $\mathcal{F}_3 = \mathfrak{P}(\Omega)$.



   Gibt es in diesem Modell Arbitragemöglichkeiten? Wenn es keine gibt, dann bestimme die Menge aller äquivalenten Martingalmaße. Ist das Modell vollständig?

3. Betrachte das Modell aus dem vorigen Beispiel. Bestimme den Preis zur Zeit $t = 0$

   (i) einer Put-Option $C^{put} = (K - S_3)_+$ mit Strikepreis $K = 110$.

   (ii) einer Butterfly-Option $C^{bf} = (K - |S_3 - M|)_+$ mit $K = 25$ und $M = 90$.

   (iii) einer up-and-out Barrier-Option $C^{u\&o} = (S_3 - K)_+ \cdot \mathbb{1}_{\{\max_k S_k < H\}}$ mit $K = 80$ und $H = 150$.

   (iv) einer down-and-out Barrier-Option $C^{d\&o} = (S_3 - K)_+ \cdot \mathbb{1}_{\{\min_k S_k \geq H\}}$ mit $K = 120$ und $H = 90$.

   (v) einer Lookback Call-Option $C^{lb} = S_3 - \min_k S_k$.

4. Betrachte das Modell aus dem vorvorigen Beispiel.

   (i) Berechne den Preis einer Put-Option mit Strikepreis $K = 80$. Nun berechne den Preis einer Call-Option mit Strikepreis $K = 80$ unter Verwendung der Call-Put-Parität.

   (ii) Berechne den Preis einer up-and-in Barrier-Option $C^{u\&i} = (S_3 - K)_+ \mathbb{1}_{\{\max_k S_k \geq H\}}$ mit $K = 80$ und 150, indem du die Auszahlung $C^{u\&i}$ durch die entsprechenden Auszahlungen C^{call} und $C^{u\&o}$ ausdrückst und die vorher berechneten Preise verwendest.

   Begründe sorgfältig deine Vorgangsweise!

5. Betrachte das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$ und $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$.

$$B_0 = 1 \longrightarrow B_1 = \tfrac{4}{3} \longrightarrow B_2 = \tfrac{5}{3}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 120 \\
 & S_1(\omega_{1,2,3}) = 80 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_2(\omega_2) = 100 \\
S_0 = 50 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{3,4}) = 80 \\
 & S_1(\omega_{4,5}) = 40 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_5) = 40
\end{tikzcd}$$

   (i) Bestimme die Menge aller äquivalenten Martingalmaße.
   Hinweis: Betrachte zu jeder Periode das entsprechende Teilmodell. Bestimme für diese die (bedingten) äquivalenten Martingalmaße, um so ein Martingalmaß für das gesamte Modell zu erhalten. Vergiss nicht zu diskontieren!

   (ii) Berechne den arbitragefreien Preis (die Menge der arbitragefreien Preise) für einen Call mit Strikepreis $K = 50$.

   (iii) Betrachte nun das Modell mit $B_2 = \frac{6}{3}$ ist. Was passiert?

6. Betrachte das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$ und $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$.

$$\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{4}{3} \arrow[r] & B_2 = \frac{5}{3}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 120 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 80 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 50 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 80 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 40 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 40
\end{tikzcd}$$

Finde eine selbstfinanzierende replizierende Strategie für den Claim mit $C(\omega_1) = 70$, $C(\omega_{2,3}) = 30$ und $C(\omega_4) = 0$.

7. Gegeben sei ein Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$ und $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$.

$$\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = 1 \arrow[r] & B_2 = 1
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 3 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 1 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 0,4 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 0,2
\end{tikzcd}$$

Betrachte eine Put-Option mit Strikepreis $K = 1,5$.

(i) Zeige, dass es keine statisches Portfolio über dem Zeitraum $[0,2]$ gibt, das die Option repliziert.
(Statisches Portfolio bedeutet, dass das anfangs gewählte Portfolio über den gesamten Zeitraum nicht verändert wird.)

(ii) Finde ein (dynamisches) selbstfinanzierendes Portfolio, dass die Option repliziert.