Technische Universität Wien
Finanz- und Versicherungsmathematik

Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle — SS 2012

Übungsblatt 8

1. Betrachte das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ für $i = 1, ..., 5$.

$$\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{5}{4} \arrow[r] & B_2 = \frac{6}{4}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 72 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 45 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 24 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_1(\omega_3) = 30 \arrow[r] & S_2(\omega_{2,3,4}) = x \\
 & S_1(\omega_{4,5}) = 25 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_5) = 12
\end{tikzcd}$$

   (i) Berechne $x \geq 0$, sodass das Modell arbitragefrei wird.
   (ii) Berechne die Menge aller äquivalenten Martingalmaße.
   (iii) Berechne die Menge aller arbitragefreien Preise für einen Claim mit $C(\omega_{1,5}) = 12$ und $C(\omega_{2,3,4}) = 0$.

2. Betrachte das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ für $i = 1, ..., 5$.

$$\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{9}{8} \arrow[r] & B_2 = \frac{81}{64}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = \frac{2025}{64} \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = \frac{180}{8} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 16 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_1(\omega_3) = \frac{144}{8} \arrow[r] & S_2(\omega_{2,3,4}) = \frac{1296}{64} \\
 & S_1(\omega_{4,5}) = \frac{108}{8} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_5) = \frac{729}{64}
\end{tikzcd}$$

   (i) Zeige, dass der (B, S)-Markt arbitragefrei ist.
   (ii) Ist der (B, S)-Markt vollständig?

(iii) Der (B, S)-Markt wird um eine Put-Option mit Strikepreis $K = \frac{810}{64}$ und Fälligkeit $T = 2$ erweitert, wobei der Preisprozess der Put-Option durch

$$P_0 = 1/14, \quad P_1(\omega_{1,2}) = 9/14, P_1(\omega_{3,4,5}) = 0, \quad P_2 = (K - S_2)_+$$

gegeben ist. Berechne die Menge aller äquivalenten Martingalmaße für das erweiterte (B, S, P)-Modell.

3. Gegeben sei ein Binomialmodell mit $r = 0.04, u = 1.15, d = 0.95, B_0 = 0$ und $S_0 = 2000$. Im i-ten Zeitschritt gilt daher

$$B_i \longrightarrow B_{i+1} = (1+r)B_i = (1+r)^{i+1}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & S_{i+1} = uS_i \\ S_i \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\ & S_{i+1} = dS_i \end{tikzcd}$$

Sei Z die Anzahl der „guten Tage“ (Aufwärtsschritte von S) bis T, also ist $Z \in \{0, 1, ..., 10\}$. Mit Hilfe von Z ergibt sich für S_T die folgende Darstellung

$$S_T(\omega) = S_0 u^{Z(\omega)} d^{T-Z(\omega)}, \omega \in \Omega.$$

Betrachte eine europäische Call-Option mit Fälligkeit $T = 10$ und $K = 1500$.

(i) Für welche Werte von Z wird der Call ausgeübt ($S_T > 1500$)?

(ii) Berechne für einen Zeitschritt die risikoneutrale (bedingte) Wahrscheinlichkeit für einen Aufwärtsschritt, d.h. berechne q.

(iii) Berechne den arbitragefreien Preis der europäischen Call-Option zur Zeit $t = 0$.
Hinweis: Berechne zuerst den arbitragefreien Preis für die entsprechende Put-Option und verwende die Call-Put-Parität.

Wir betrachten nun das Black-Scholes-Modell mit Bankkontoeinheit
$B = (B_t)_{t\in[0,T]}, B_t = e^{rt}$, und Aktienpreisprozess $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$.
Der arbitragefreie Preis einer Call-Option zur Zeit $t \in [0, T]$ ist in diesem Modell durch $C_t = c(S_t, T - t, K, \sigma, r)$ gegeben.
Für $s, t, K, \sigma > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ ist

$$c(s, t, K, \sigma, r) = s\Phi(d_1) - e^{-rt}K\Phi(d_2)$$

$$\text{wobei} \quad d_{1,2} = d_{1,2}(s, t, K, \sigma, r) = \frac{\ln(\frac{s}{K}) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}.$$

Dabei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.
In den folgenden beiden Beispielen sollen die Black-Scholes-Sensitivitäten („The Greeks") berechnet werden.

4. In diesem Beispiel soll das „Delta" der Call-Option im Black-Scholes-Model berechnet werden.
   (i) Berechne $\Phi'(x)$.
   (ii) Zeige: $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{t}$
   (iii) Zeige: $s\Phi'(d_1) = Ke^{-rt}\Phi'(d_2)$
   (iv) Zeige: $\frac{\partial d_1}{\partial s} = \frac{\partial d_2}{\partial s}$
   (v) Berechne nach dieser ganzen Vorarbeit das **Delta** der Call-Option, d.h. berechne $\frac{\partial c}{\partial s}$.

5. Leite die folgenden Ergebnisse für die Black-Scholes-Sensitivitäten her. Dabei bezeichnet φ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.

$$\begin{aligned}
\textbf{Gamma}: &\quad \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}s}\varphi(d_1) \\
\textbf{Theta}: &\quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{s\sigma}{2\sqrt{t}}\varphi(d_1) + Kre^{-rt}\Phi(d_2) \\
\textbf{Vega}: &\quad \frac{\partial c}{\partial \sigma} = s\sqrt{t}\varphi(d_1) \\
\textbf{Rho}: &\quad \frac{\partial c}{\partial r} = tKe^{-rt}\Phi(d_2)
\end{aligned}$$

6. Ein Unternehmen möchte eine europäische Call-Option auf Öl mit Strikepreis $K = 100$ kaufen. Der gegenwärtige Ölpreis beträgt $S_0 = 100$. Die Volatilität (Schwankung) des Preises und der risikolose Zins beträgt $\sigma = 0,1$ bzw. $r = 0,03$.
   (i) Berechne den Preis einer viermonatigen Call-Option, d.h. $t = \frac{1}{3}$.
   (ii) Berechne auch das Delta, Gamma, Theta, Vega und Rho dieser Call-Option.