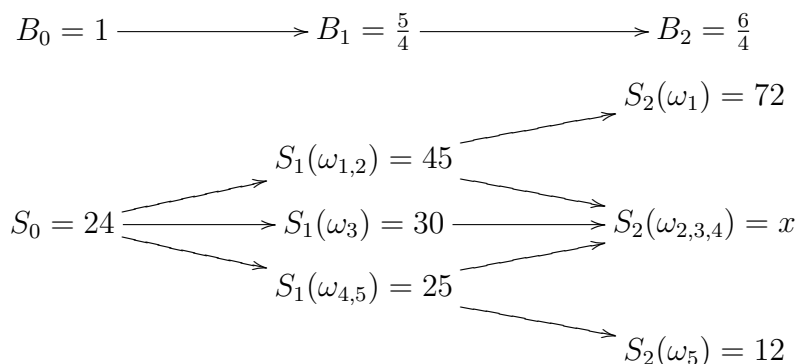


Finanzmathematik 1: Diskrete Modelle

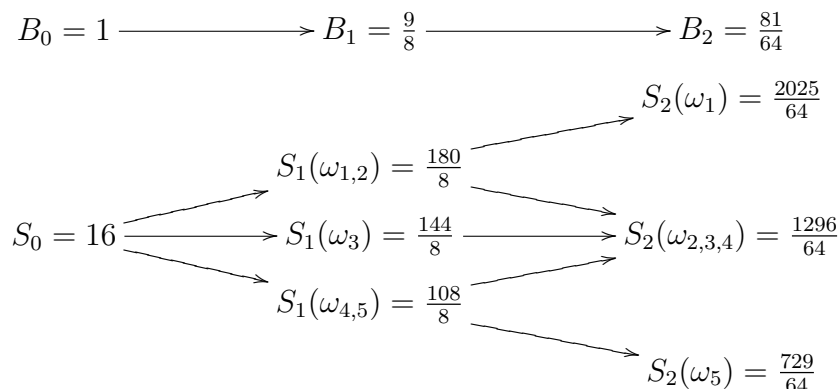
Übungsblatt 8

SS 2012

1. Betrachte das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S . Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ für $i = 1, \dots, 5$.



- (i) Berechne $x \geq 0$, sodass das Modell arbitragefrei wird.
(ii) Berechne die Menge aller äquivalenten Martingalmaße.
(iii) Berechne die Menge aller arbitragefreien Preise für einen Claim mit $C(\omega_{1,5}) = 12$ und $C(\omega_{2,3,4}) = 0$.
2. Betrachte das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S . Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ für $i = 1, \dots, 5$.



- (i) Zeige, dass der (B, S) -Markt arbitragefrei ist.
(ii) Ist der (B, S) -Markt vollständig?

- (iii) Der (B, S) -Markt wird um eine Put-Option mit Strikepreis $K = \frac{810}{64}$ und Fälligkeit $T = 2$ erweitert, wobei der Preisprozess der Put-Option durch

$$P_0 = 1/14, \quad P_1(\omega_{1,2}) = 9/14, P_1(\omega_{3,4,5}) = 0, \quad P_2 = (K - S_2)_+$$

gegeben ist. Berechne die Menge aller äquivalenten Martingalmaße für das erweiterte (B, S, P) -Modell.

3. Gegeben sei ein Binomialmodell mit $r = 0.04, u = 1.15, d = 0.95, B_0 = 0$ und $S_0 = 2000$. Im i -ten Zeitschritt gilt daher

$$B_i \longrightarrow B_{i+1} = (1+r)B_i = (1+r)^{i+1}$$

$$S_i \begin{cases} \xrightarrow{q} S_{i+1} = uS_i \\ \xrightarrow{1-q} S_{i+1} = dS_i \end{cases}$$

Sei Z die Anzahl der „guten Tage“ (Aufwärtsschritte von S) bis T , also ist $Z \in \{0, 1, \dots, 10\}$. Mit Hilfe von Z ergibt sich für S_T die folgende Darstellung

$$S_T(\omega) = S_0 u^{Z(\omega)} d^{T-Z(\omega)}, \omega \in \Omega.$$

Betrachte eine europäische Call-Option mit Fälligkeit $T = 10$ und $K = 1500$.

- (i) Für welche Werte von Z wird der Call ausgeübt ($S_T > 1500$)?
- (ii) Berechne für einen Zeitschritt die risikoneutrale (bedingte) Wahrscheinlichkeit für einen Aufwärtsschritt, d.h. berechne q .
- (iii) Berechne den arbitragefreien Preis der europäischen Call-Option zur Zeit $t = 0$.
Hinweis: Berechne zuerst den arbitragefreien Preis für die entsprechende Put-Option und verwende die Call-Put-Parität.

Wir betrachten nun das Black-Scholes-Modell mit Bankkontoeinheit

$B = (B_t)_{t \in [0, T]}$, $B_t = e^{rt}$, und Aktienpreisprozess $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$.

Der arbitragefreie Preis einer Call-Option zur Zeit $t \in [0, T]$ ist in diesem Modell durch $C_t = c(S_t, T - t, K, \sigma, r)$ gegeben.

Für $s, t, K, \sigma > 0$ und $r \in \mathbb{R}$ ist

$$c(s, t, K, \sigma, r) = s\Phi(d_1) - e^{-rt}K\Phi(d_2)$$

$$\text{wobei } d_{1,2} = d_{1,2}(s, t, K, \sigma, r) = \frac{\ln(\frac{s}{K}) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}.$$

Dabei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

In den folgenden beiden Beispielen sollen die Black-Scholes-Sensitivitäten („The Greeks“) berechnet werden.

4. In diesem Beispiel soll das „Delta“ der Call-Option im Black-Scholes-Modell berechnet werden.

- (i) Berechne $\Phi'(x)$.
- (ii) Zeige: $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{t}$
- (iii) Zeige: $s\Phi'(d_1) = Ke^{-rt}\Phi'(d_2)$
- (iv) Zeige: $\frac{\partial d_1}{\partial s} = \frac{\partial d_2}{\partial s}$
- (v) Berechne nach dieser ganzen Vorarbeit das **Delta** der Call-Option, d.h. berechne $\frac{\partial c}{\partial s}$.

5. Leite die folgenden Ergebnisse für die Black-Scholes-Sensitivitäten her. Dabei bezeichnet φ die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung.

$$\mathbf{Gamma} : \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{ts}}\varphi(d_1)$$

$$\mathbf{Theta} : \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{s\sigma}{2\sqrt{t}}\varphi(d_1) + Kre^{-rt}\Phi(d_2)$$

$$\mathbf{Vega} : \frac{\partial c}{\partial \sigma} = s\sqrt{t}\varphi(d_1)$$

$$\mathbf{Rho} : \frac{\partial c}{\partial r} = tKe^{-rt}\Phi(d_2)$$

6. Ein Unternehmen möchte eine europäische Call-Option auf Öl mit Strikepreis $K = 100$ kaufen. Der gegenwärtige Ölpreis beträgt $S_0 = 100$. Die Volatilität (Schwankung) des Preises und der risikolose Zins beträgt $\sigma = 0,1$ bzw. $r = 0,03$.

- (i) Berechne den Preis einer viermonatigen Call-Option, d.h. $t = \frac{1}{3}$.
- (ii) Berechne auch das Delta, Gamma, Theta, Vega und Rho dieser Call-Option.