Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle (SS 2012)
Vorlesungsprüfung
7. Oktober 2013
Stefan Gerhold

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Anmeldung zur mündlichen Prüfung via TISS möglich.
Wenn zu wenig Prüfungstermine online sind, bitte
den Vortragenden Stefan Gerhold kontaktieren.

Bsp.	Max.	Punkte
1	4	
2	4	
3	4	
$\sum$	12	

1. Gegeben sei ein Binomialmodell mit $r = 0, u = 1.1$, $d = 0.90, B_0 = 1$ und $S_0 = 100$. Im i-ten Zeitschritt gilt daher

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
B_i \arrow[r] & B_{i+1} = B_i \\
& S_{i+1} = uS_i \\
S_i \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& S_{i+1} = dS_i
\end{tikzcd}$$

Betrachte folgenden claim mit Fälligkeit $T = 10$:

$$C = \begin{cases} 1, & 100 \leq S_T \leq 200 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei Z die Anzahl der „guten Tage“ (Aufwärtsschritte von S) bis T, also ist $Z \in \{0, 1, ..., T\}$. Dann ist $S_T(\omega) = S_0 u^{Z(\omega)} d^{T-Z(\omega)}, \omega \in \Omega$.

(i) Für welche Werte von Z hat der claim eine positive Auszahlung?

(ii) Berechne für einen Zeitschritt die risikoneutrale (bedingte) Wahrscheinlichkeit für einen Aufwärtsschritt.

(iii) Berechne den arbitragefreien Preis des claims zur Zeit $t = 0$.

2. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskobehafteten Finanzgut B und S auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dabei sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2)$ und $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, ..., 4$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{9}{8} \arrow[r] & B_2 = \frac{14}{10} \\
& & S_2(\omega_1) = 120 \\
& S_1(\omega_{1,2}) = 90 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 50 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 60 \\
& S_1(\omega_{3,4}) = 45 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & S_2(\omega_4) = 24
\end{tikzcd}$$

(i) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße $\mathbb{P}^*$.
(Identifizieren Sie dabei $\mathbb{P}^*$ mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = \mathbb{P}^*(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3, 4$.)

(ii) Berechnen Sie den Preisprozess einer amerikanischen Put-Option mit Strikepreis $K = 70$.

(iii) Bestimmen Sie außerdem die optimale Stoppzeit $\tau_{\min}$.

3. Betrachte ein Einperiodenmodell mit konstantem Bond $B \equiv 1$ und stock

$$\begin{tikzcd} & S_1(\omega_1) = 4 \\ S_0 = 3 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & S_1(\omega_2) = 3 \\ & S_1(\omega_3) = 2 \end{tikzcd}$$

Es gelte $\mathbb{P}[\omega_1] = 1/10$, $\mathbb{P}[\omega_2] = 5/10$ und $\mathbb{P}[\omega_3] = 4/10$. Wir betrachten die Nutzenfunktion $u(x) = \log x$ und das Maximierungsproblem

$$U(x) = \sup_X E[u(x + X)],$$

wobei X die erreichbaren Auszahlungen zur Zeit 1 durchläuft.

(i) Lösen Sie das Problem direkt, d.h., bestimmen sie die erreichbaren Auszahlungen, den Maximierer $\hat{X}$ und die Wertfunktion U.

(ii) Bestimmen Sie $\mathcal{M}^{\mathrm{a}}(S)$, die Menge der absolut stetigen Martingalmaße.

(iii) Schreiben Sie das duale Optimierungsproblem auf (explizit, d.h. unter Verwendung der konkreten Gestalt von $\mathcal{M}^{\mathrm{a}}(S)$ und der konjugierten Funktion v).