Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle (Vorlesungsprüfung) 14. November 2013

Dauer: 90 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner und ein von Hand (beidseitig) beschriebener A4-Zettel benutzt werden.

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,
Sandra Trenovatz (sandra@fam.tuwien.ac.at).

Bsp.	Max.	Punkte
1	25	
2	35	
3	40	
$\sum$	100	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. **Zwei-Perioden-Modell: Hedgingstrategie**
   Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Desweiteren sei $r \geq 0$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, ..., 4\}$.

$$B_0 = 1 \longrightarrow B_1 = (1+r) \longrightarrow B_2 = (1+r)^2$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 144 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 108 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 90 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 96 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 72 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 48
\end{tikzcd}$$

   1) Bestimmen Sie die Zinssätze r, für die das obige Modell arbitragefrei ist. 5 Pkt
   2) Es sei $r = 0$. Zeigen Sie, dass das Modell vollständig ist und berechnen Sie die replizierende Handelsstrategie des Claims $C_0 = 0$, $C_1(\omega_{1,2}) = 96$, $C_1(\omega_{3,4}) = 84$, $C_2(\omega_1) = 114$, $C_2(\omega_2) = C_2(\omega_3) = 90$ und $C_2(\omega_4) = 78$. Bestimmen Sie den fairen Preis des Claims. 20 Pkt

2. **Zwei-Perioden-Modell: Snell-Einhüllende**
Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, ..., 4\}$.

$$
\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{4}{3} \arrow[r] & B_2 = \frac{7}{3} \\
 & & S_2(\omega_1) = 49 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 24 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 15 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 28 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 12 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 14
\end{tikzcd}
$$

1) Bestimmen Sie das äquivalente Martingalmaß. 5 Pkt
2) Geben Sie zunächst die Definition der Snell'schen Einhüllenden an. Berechnen Sie anschließend die Snell-Einhüllende des Claims $C_0 = 0$, $C_1(\omega_{1,2}) = 20$, $C_1(\omega_{3,4}) = 16$, $C_2(\omega_1) = 42$, $C_2(\omega_2) = C_2(\omega_3) = 28$ und $C_2(\omega_4) = 21$. 20 Pkt
3) Berechnen Sie die minimale optimale Stoppzeit τ_{min}. 10 Pkt

3. **Black-Scholes-Modell**
Betrachten Sie auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Black-Scholes-Modell mit Bankkonto $B = (B_t)_{t\geq 0}$, $B_t = e^{rt}$ für $r \geq 0$ und Aktienpreisprozess $S = (S_t)_{t\geq 0}$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ ist der diskontierte Preisprozess durch

$$X_t = S_0 \exp\left[\sigma W_t + (\alpha - r)t\right]$$

gegeben, wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P und der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ mit

$$\mathcal{F}_t := \sigma\left(B_s : \; s \leq t\right) \tag{1}$$

ist.

1) Geben Sie die Definition einer Brown'schen Bewegung an. 10 Pkt
2) Nehmen Sie an, daß die ganzen Zahlen der Indexmenge für 'Tage' stehen. Es seien $t, 2t \in \mathbb{Z}$. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass der Wert der diskontierten Aktie in $2t$ Tagen mehr als doppelt so hoch ist, als in t Tagen. 20 Pkt
3) Wie verhält es sich mit der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in Teilaufgabe 2) für $t \to \infty$? Wann 'lohnt' es sich, 'ewig' zu warten? 10 Pkt