

Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
3. März 2014

Dauer: 90 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner und ein von Hand (beidseitig) beschriebener A4-Zettel benutzt werden.

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,
Sandra Trenovatz (sandra@fam.tuwien.ac.at).

Bsp.	Max.	Punkte
1	25	
2	35	
3	40	
Σ	100	

Schriftlich:

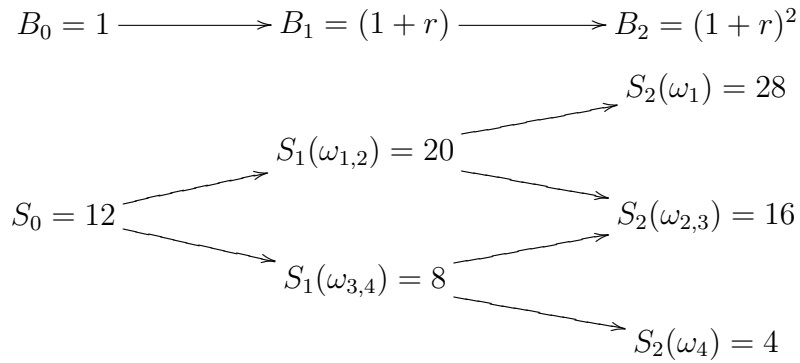
AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. **Zwei-Perioden-Modell: Hedgingstrategie**

Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S . Desweiteren sei $r \geq 0$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, \dots, 4\}$.

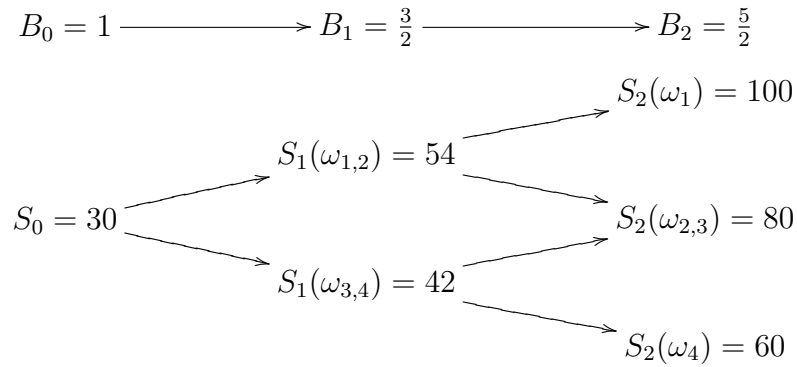


1) Bestimmen Sie die Zinssätze r , für die das obige Modell arbitragefrei ist. 5 Pkt

2) Es sei $r = 0$. Zeigen Sie, dass das Modell vollständig ist und berechnen Sie die replizierende Handelsstrategie des Claims $C_0 = 0$, $C_1(\omega_{1,2}) = 16$, $C_1(\omega_{3,4}) = 8$, $C_2(\omega_1) = 32$, $C_2(\omega_2) = C_2(\omega_3) = 12$ und $C_2(\omega_4) = 4$. Bestimmen Sie den fairen Preis des Claims. 20 Pkt

2. Zwei-Perioden-Modell: Snell-Einhüllende

Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S . Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, \dots, 4\}$.



- 1) Bestimmen Sie das äquivalente Martingalmaß. 5 Pkt
- 2) Geben Sie zunächst die Definition der Snell'schen Einhüllenden an. Berechnen Sie anschließend die Snell-Einhüllende des Claims $C_0 = 0$, $C_1(\omega_{1,2}) = 48$, $C_1(\omega_{3,4}) = 30$, $C_2(\omega_1) = 90$, $C_2(\omega_2) = C_2(\omega_3) = 70$ und $C_2(\omega_4) = 45$. 20 Pkt
- 3) Berechnen Sie die minimale optimale Stoppzeit τ_{min} . 10 Pkt

3. Brown'sche Bewegung und Black-Scholes-Modell

Es sei (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(W_t)_{t \geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P .

1) Geben Sie die Definition einer Brown'schen Bewegung an. 10 Pkt

2) Zeigen Sie, dass $(W_t)_{t \geq 0}$ ein P -Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ ist, wobei 10 Pkt

$$\mathcal{F}_t := \sigma(W_s : s \leq t). \quad (1)$$

3) Betrachten Sie ein Black-Scholes-Modell mit konstantem Zinssatz $r \geq 0$ und konstanter Volatilität $\sigma > 0$. Desweiteren bezeichne $S_0 > 0$ den Aktienpreis zum Zeitpunkt $t = 0$. Der arbitragefreie Preis einer Europäischen Call-Option mit Strike $K > 0$ und Fristigkeit $T > 0$ ist durch $v(S_0, T)$ gegeben, wobei 20 Pkt

$$v(x, T) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x e^{\sigma\sqrt{T}y + rT - \sigma^2 T/2} - K \right)^+ e^{-y^2/2} dy.$$

Zeigen Sie, dass für das Delta

$$\Delta(x, T) := \frac{\partial}{\partial x} v(x, T)$$

der Europäischen Call-Option

$$\Delta(x, T) = \Phi(d_+(x, T))$$

gilt, wobei $\Phi(x) = (2\pi)^{-0.5} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$ und

$$d_+(x, T) := \frac{\log \frac{x}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) T}{\sigma\sqrt{T}}.$$