Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
3. März 2014

Dauer: 90 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner und ein von Hand (beidseitig) beschriebener A4-Zettel benutzt werden.

Anmeldung zur mündlichen Prüfung im Sekretariat,
Sandra Trenovatz (sandra@fam.tuwien.ac.at).

Bsp.	Max.	Punkte
1	25	
2	35	
3	40	
$\sum$	100	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. **Zwei-Perioden-Modell: Hedgingstrategie**
Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Desweiteren sei $r \geq 0$, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, ..., 4\}$.

$$B_0 = 1 \longrightarrow B_1 = (1+r) \longrightarrow B_2 = (1+r)^2$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 28 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 20 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 12 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 16 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 8 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 4
\end{tikzcd}$$

1) Bestimmen Sie die Zinssätze r, für die das obige Modell arbitragefrei ist. 5 Pkt
2) Es sei $r = 0$. Zeigen Sie, dass das Modell vollständig ist und berechnen Sie die replizierende Handelsstrategie des Claims $C_0 = 0$, $C_1(\omega_{1,2}) = 16$, $C_1(\omega_{3,4}) = 8$, $C_2(\omega_1) = 32$, $C_2(\omega_2) = C_2(\omega_3) = 12$ und $C_2(\omega_4) = 4$. Bestimmen Sie den fairen Preis des Claims. 20 Pkt

2. **Zwei-Perioden-Modell: Snell-Einhüllende**
Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen und einem riskanten Finanzgut B und S. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, ..., 4\}$.

$$B_0 = 1 \longrightarrow B_1 = \tfrac{3}{2} \longrightarrow B_2 = \tfrac{5}{2}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & S_2(\omega_1) = 100 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 54 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 30 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 80 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 42 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 60
\end{tikzcd}$$

1) Bestimmen Sie das äquivalente Martingalmaß. 5 Pkt
2) Geben Sie zunächst die Definition der Snell'schen Einhüllenden an. Berechnen Sie anschließend die Snell-Einhüllende des Claims $C_0 = 0$, $C_1(\omega_{1,2}) = 48$, $C_1(\omega_{3,4}) = 30$, $C_2(\omega_1) = 90$, $C_2(\omega_2) = C_2(\omega_3) = 70$ und $C_2(\omega_4) = 45$. 20 Pkt
3) Berechnen Sie die minimale optimale Stoppzeit τ_{min}. 10 Pkt

3. **Brown'sche Bewegung und Black-Scholes-Modell**
Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(W_t)_{t\geq 0}$ eine Brown'sche Bewegung bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes P.

1) Geben Sie die Definition einer Brown'schen Bewegung an. 10 Pkt

2) Zeigen Sie, dass $(W_t)_{t\geq 0}$ ein P-Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist, wobei 10 Pkt

$$\mathcal{F}_t := \sigma\left(W_s : s \leq t\right). \tag{1}$$

3) Betrachten Sie ein Black-Scholes-Modell mit kontantem Zinssatz $r \geq 0$ und konstanter Volatilität $\sigma > 0$. Desweiteren bezeichne $S_0 > 0$ den Aktienpreis zum Zeitpunkt $t = 0$. Der arbitragefreie Preis einer Europäischen Call-Option mit Strike $K > 0$ und Fristigkeit $T > 0$ ist durch $\upsilon(S_0, T)$ gegeben, wobei 20 Pkt

$$\upsilon(x,T) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(xe^{\sigma\sqrt{T}y + rT - \sigma^2 T/2} - K\right)^+ e^{-y^2/2} dy.$$

Zeigen Sie, dass für das `Delta`

$$\Delta(x,T) := \frac{\partial}{\partial x}\upsilon(x,T)$$

der Europäischen Call-Option

$$\Delta(x,T) = \Phi\left(d_+(x,T)\right)$$

gilt, wobei $\Phi(x) = (2\pi)^{-0.5} \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2} dy$ und

$$d_+(x,T) := \frac{\log\frac{x}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$