Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle (Vorlesungsprüfung) 6. Oktober 2014 Christa Cuchiero

90 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: ein handbeschriebener DIN-A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Informationen zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	12	
2	12	
3	12	
$\sum$	36	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Wir betrachten ein Einperiodenmodell mit einem risikolosen Wertpapier S^0 und zwei riskanten Wertpapieren S^1 und S^2. (12 Pkt.)

   (i) Geben Sie einen (möglichst einfachen) Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und einen Zufallsvektor $\overline{S} = (S^0, S^1, S^2)$ darauf an, sodass letzterer folgende drei Eigenschaften hat.

   - $S^0 = 1$.
   - S^1 und S^2 sind unabhängig unter P.
   - Es gilt

$$
\begin{aligned}
P(S^1 = 110) = P(S^2 = 110) &= \frac{1}{2} \\
P(S^1 = 80) = P(S^2 = 80) &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

   (ii) Auf dem von Ihnen in (i) angegebenen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betrachten Sie das Finanzmarktmodell $(\overline{\pi}, \overline{S})$, wobei $\overline{\pi} = (1, 100, 100)$ und $\overline{S} = (S^0, S^1, S^2)$ die drei angeführten Eigenschaften hat. Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße für das Finanzmarktmodell $(\overline{\pi}, \overline{S})$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$.

   (iii) Ist das betrachtete Finanzmarktmodell $(\overline{\pi}, \overline{S})$ arbitragefrei? Ist es vollständig?

   (iv) Betrachten Sie nun eine Option, welche dem Käufer ebendieser das Recht einräumt zum Zeitpunkt $T = 1$ das Asset S^2 gegen das Asset S^1 zu tauschen. Wie sieht der Payoff dieser Option aus? Weiters bestimme man alle arbitragefreien Preise dieser Option!

2. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut B und einem riskanten Finanzgut X. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(X_1, X_2) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. (12 Pkt.)

$$
B_0 = 1 \longrightarrow B_1 = 1 \longrightarrow B_2 = 1
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & X_2(\omega_1) = 9 \\
 & X_1(\omega_{1,2}) = 8 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
X_0 = 5 \arrow[ur] \arrow[dr] & & X_2(\omega_{2,3}) = 6 \\
 & X_1(\omega_{3,4}) = 4 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & X_2(\omega_4) = 3
\end{tikzcd}
$$

   (i) Bestimmen Sie das äquivalente Martingalmaß P^*. Identifizieren sie dabei P^* mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = P^*(\{\omega_i\})$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(ii) Geben Sie zunächst allgemein die Definition der Snell-Einhüllenden eines nicht-negativen adaptierten Prozesses $(H_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ mit $T \in \mathbb{N}$ an. Berechnen sie diese weiters unter dem Martingalmaß P^* im obigen Finanzmarktmodell für den Claim $H = (H_t)_{t\in\{0,\dots,2\}}$ definiert durch

$$\begin{aligned}
H_0 &= \frac{1}{2}\\
H_1(\omega_{1,2}) &= 3\\
H_1(\omega_{3,4}) &= 0\\
H_2(\omega_1) &= 4\\
H_2(\omega_{2,3}) &= 1\\
H_2(\omega_4) &= 0.
\end{aligned}$$

(iii) Definieren Sie die minimale optimale Stoppzeit $\tau_{\min}$ und berechnen Sie diese für den gegebenen Claim H im obigen Finanzmarktmodell.

(iv) Zeigen Sie, dass im obigen Finanzmarktmodell der Preisprozess einer amerikanischen Kaufoption mit jenem einer europäischen Kaufoption mit gleichem Strike übereinstimmt. Würde diese Aussage auch gelten, wenn man neben der Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes nur annimmt, dass im Finanzmarktmodell B nicht-fallend und deterministisch ist?

3. Betrachten Sie folgendes Einperiodenmodell (S^0, S^1) auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dabei sei das risikolose Wertpapier durch $S_0^0 = S_0^1 = 1$ und das risikante Wertpapier durch $S_0^1 = 1$ und (12 Pkt.)

$$S_1^1 = e^Z, \quad \text{mit} \quad Z \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{und} \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0.$$

gegeben.

(i) Definieren Sie zuerst ein riskoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß. Für welche Parameter μ und σ Ist P risikoneutral? (Hinweis: Die momenterzeugende Funktion $M_{0,1}$ der $N(0,1)$-Verteilung ist durch $M_{0,1}(t) = \exp(t^2/2)$ gegeben.)

(ii) Von nun an sei $Z \sim N(0,1)$ unter P. Für $\nu > 0$ finden Sie ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P_ν^*, sodass $Z \sim N(-\nu^2/2, \nu^2)$ unter P_ν^* gilt. (Hinweis: Versuchen Sie den Ansatz $dP_\nu^*/dP = f_\nu(Z)$)

(iii) Sind die Maße P_ν^* risikoneutral?

(iv) Definieren Sie die Vollständigkeit eines Finanzmarktmodells. Formulieren Sie einen aus der Vorlesung bekannten Satz, der die Vollständigkeit und Arbitragefreiheit eines Finanzmarktmodells mittels risikoneutralen Maßen charakterisiert. Ist das hier betrachtete Einperiodenmodell arbitragefrei? Ist es auch vollständig?