Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle
(Vorlesungsprüfung)
13. November 2014
Christa Cuchiero

90 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: ein handbeschriebener DIN-A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Informationen zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	14	
2	12	
3	10	
$\sum$	36	

Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

Gesamtnote:

1. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, wobei $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4}$, für $i \in \{1,2,3,4\}$. Betrachten Sie auf diesem einen Zufallsvektor $\overline{S} = (S^0, S^1, S^2)$ mit $S^0 = 1$ und (14 Pkt.)

$$\begin{pmatrix} S^1(\omega_1) \\ S^2(\omega_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 110 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} S^1(\omega_2) \\ S^2(\omega_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} S^1(\omega_3) \\ S^2(\omega_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 80 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} S^1(\omega_4) \\ S^2(\omega_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

Gemeinsam mit dem Preisvektor $\overline{\pi} = (1, 100, 100)$ betrachte man im Folgenden das Einperioden-Finanzmarktmodell $(\overline{\pi}, \overline{S})$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

(i) Sind die riskanten Wertpapiere S^1 und S^2 unabhängig unter P? Beweisen Sie ihre Aussage!

(ii) Berechnen Sie alle äquivalenten Martingalmaße. Ist dieses Modell arbitragefrei? Welchen Satz verwenden Sie in ihrer Argumentation?

(iii) Sind die riskanten Wertpapiere S^1 und S^2 unabhängig unter jedem der in Punkt (ii) erhaltenen Martingalmaße? Gibt es ein äquivalentes Martingalmaß unter dem sie unabhängig sind? Beweisen Sie ihre Behauptungen!

(iv) Man betrachte eine Option mit Payoff $(S^2 - S^1)^+$ zum Zeitpunkt 1. Welches Recht räumt diese dem Käufer ein? Bestimmen Sie alle arbitragefreien Preise dieser Option.

(v) Ist das hier betrachtete Finanzmarkmodell vollständig? Welchen Satz verwenden Sie für Ihr Schlussfolgerung? Falls sich das Modell als nicht vollständig herausstellt gebe man einen nicht erreichbaren Zahlungsanspruch an.

2. Betrachten Sie folgendes Einperiodenmodell (S^0, S^1) auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dabei sei das risikolose Wertpapier durch $S_0^0 = S_0^1 = 1$ und das risikante Wertpapier durch $S_0^1 = 1$ und (12 Pkt.)

$$S_1^1 = e^Z, \quad \text{mit} \quad Z \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{und} \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0,$$

gegeben.

(i) Definieren Sie zuerst den Begriff des riskoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes. Für welche Parameter μ und σ Ist P risikoneutral? (Hinweis: Die momenterzeugende Funktion M_{μ,σ^2} der $N(\mu, \sigma^2)$-Verteilung ist durch $M_{\mu,\sigma^2}(u) = \exp(\mu u + \sigma^2 u^2/2)$, für $u \in \mathbb{R}$ gegeben.)

(ii) Von nun an sei $Z \sim N(0, 1)$ unter P. Für $\nu > 0$ finden Sie ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P_ν^*, sodass $Z \sim N(-\nu^2/2, \nu^2)$ unter P_ν^* gilt. Beachten Sie hierbei, dass P_ν^* auch auf $\mathcal{F}$ definiert sein muss[1]. (Hinweis: Versuchen Sie den Ansatz $dP_\nu^*/dP = f_\nu(Z)$)

(iii) Sind die Maße P_ν^* risikoneutral?

(iv) Definieren Sie die Vollständigkeit eines Finanzmarktmodells. Formulieren Sie einen aus der Vorlesung bekannten Satz, der die Vollständigkeit und Arbitragefreiheit eines Finanzmarktmodells mittels risikoneutralen Maßen charakterisiert. Ist das hier betrachtete Einperiodenmodell arbitragefrei? Ist es auch vollständig?

[1] Insbesondere machen Ausdrücke der Form $dP_\nu^*/d\lambda$, wobei λ das Lebesgue Maß ist, nicht notwendigerweise Sinn.

3. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut B und einem riskanten Finanzgut S. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1, S_2) = \mathcal{P}(\Omega)$ und $P(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. (10 Pkt.)

$$\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r] & B_1 = \frac{4}{3} \arrow[r] & B_2 = \frac{3}{2}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & S_2(\omega_1) = 21 \\
 & S_1(\omega_{1,2}) = 16 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 10 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 12 \\
 & S_1(\omega_{3,4}) = 8 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & S_2(\omega_4) = 6
\end{tikzcd}$$

(i) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaß P^*. Identifizieren sie dabei P^* mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = P^*(\{\omega_i\})$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(ii) Betrachten Sie nun eine Bull-Spread Option C deren Payoff zum Zeitpunkt 2 durch

$$C_2(\omega) = \begin{cases} 6 & \omega = \omega_1 \\ 3 & \omega \in \{\omega_2, \omega_3\} \\ 0 & \omega = \omega_4 \end{cases},$$

gegeben ist. Stellen Sie diese Option mit Hilfe eines Portfolios aus zwei Kaufoptionen auf S dar. Was sind die Ausübungspreise der verwendeten Call-Optionen?

(iii) Berechnen sie alle arbitragefreien Preise der in Punkt (ii) betrachteten Option.

(iv) Berechnen sie eine replizierende Handelsstrategie für die Option C. Geben sie insbesondere alle Positionen in B und S hierfür an. Welche Eigenschaften zeichnen eine replizierende Handelsstrategie für einen Zahlungsanspruch im Allgemeinen aus?