

Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

**Finanzmathematik 1: diskrete Modelle**  
**(Vorlesungsprüfung)**  
**2. März 2015**  
**Christa Cuchiero**

90 Minuten

Erlaubte Hilfsmittel: ein handbeschriebener DIN-A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Informationen zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

---

Bsp.	Max.	Punkte
1	12	
2	12	
3	12	
$\Sigma$	36	

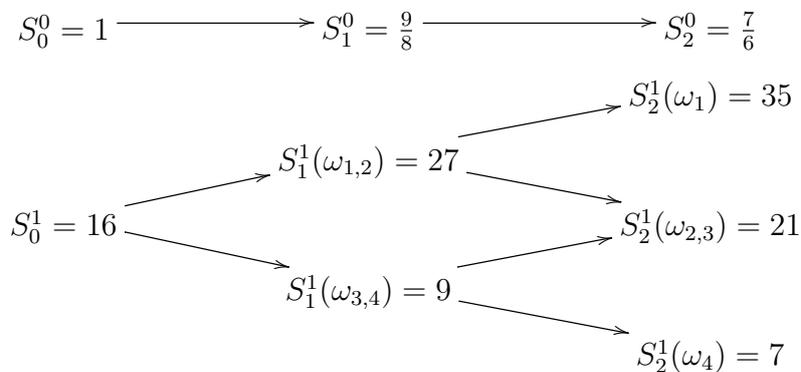
Schriftlich:

AssistentIn:

Mündlich:

**Gesamtnote:**

1. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut  $S^0$  und einem riskanten Finanzgut  $S^1$  auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Dabei sei  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  und  $P(\{\omega_i\}) > 0$  für  $i \in \{1, \dots, 4\}$ . Außerdem sei die Filtration im Finanzmarktmodell durch  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1^1)$  und  $\mathcal{F}_2 = \sigma(S_1^1, S_2^1)$  gegeben. (12 Pkt.)



- (i) Definieren Sie Arbitragefreiheit in diesem Finanzmarktmodell und formulieren Sie das “Fundamental Theorem of Asset Pricing” um den Zusammenhang zu Martingalmaßen zu erläutern.
- (ii) Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße  $P^*$  im obigen Finanzmarktmodell. Identifizieren Sie dabei  $P^*$  mit  $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$ , wobei  $p_i = P^*(\{\omega_i\})$  für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ .
- (iii) Betrachten Sie eine Lookback-Call-Option auf das Wertpapier  $S^1$  und bewerten Sie diese indem Sie einen (nicht diskontierten) Preisprozess  $(C_t)_{t \in \{0,1,2\}}$  angeben, sodass das erweiterte Finanzmarktmodell arbitragefrei ist. Der Payoff  $C_2$  dieser Option ist durch

$$C_2 = S_2^1 - \min_{t \in \{0,1,2\}} S_t^1$$

gegeben.

2. Betrachten Sie folgendes Einperiodenmodell  $(S^0, S^1)$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Dabei sei das risikolose Wertpapier durch  $S_0^0 = S_0^1 = 1$  und das riskante Wertpapier durch  $S_1^1 = 1$  und (12 Pkt.)

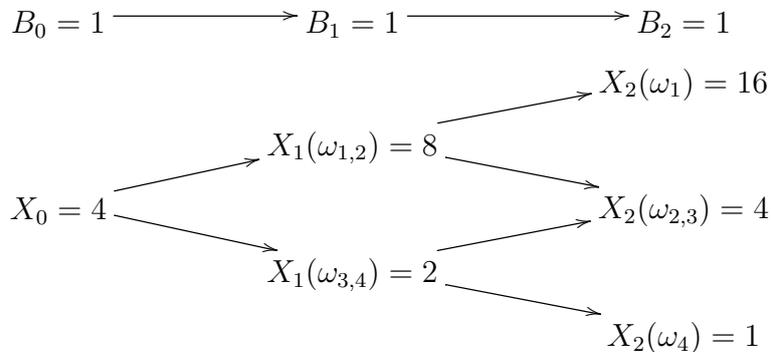
$$S_1^1 = Z, \quad \text{mit } Z \sim \text{Exp}(\lambda) \quad \text{und } \lambda > 0,$$

gegeben, wobei  $\text{Exp}(\lambda)$  die Exponentialverteilung bezeichnet (mit Dichte  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  für  $x \geq 0$  und 0 sonst.)

- (i) Definieren Sie zuerst ein riskoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß. Für welche Parameter  $\lambda$  ist  $P$  riskoneutral?
- (ii) Von nun an sei  $Z \sim \text{Exp}(2)$  unter  $P$ . Ist der Markt arbitragefrei?

- (iii) Definieren Sie die Vollständigkeit eines Finanzmarktmodells. Formulieren Sie einen aus der Vorlesung bekannten Satz, der die Vollständigkeit eines Finanzmarktmodells mittels risikoneutralen Maßen charakterisiert. Ist das hier betrachtete Einperiodenmodell vollständig?
- (iv) Gibt es ein zu  $P$  (wobei  $Z \sim \text{Exp}(2)$  unter  $P$ ) äquivalentes Maß  $P_{b,p}^*$  sodass  $Z \sim \gamma(b, p)$  mit  $b, p > 0$ , wobei  $\gamma(b, p)$  die Gammaverteilung bezeichnet (mit Dichte  $f(x) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx}$  für  $x \geq 0$  und 0 sonst.) Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn ja für welche Parameter  $b, p$  ist  $P_{b,p}^*$  risikoneutral? (Hinweis: Der Erwartungswert einer Gamma-verteilten Zufallsvariable ist  $\frac{p}{b}$ .)

3. Betrachten Sie das folgende Zweiperiodenmodell mit einem risikolosen Finanzgut  $B$  und einem riskanten Finanzgut  $X$ . Desweiteren sei  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ ,  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ ,  $\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1)$ ,  $\mathcal{F}_2 = \sigma(X_1, X_2) = \mathcal{P}(\Omega)$  und  $P(\omega_i) > 0$  für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . (12 Pkt.)



- (i) Bestimmen Sie das äquivalente Martingalmaß  $P^*$ .
- (ii) Geben Sie zunächst allgemein die Definition der Snell-Einhüllenden eines nicht-negativen adaptierten Prozesses  $(H_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  mit  $T \in \mathbb{N}$  an. Berechnen Sie diese weiters unter dem Martingalmaß  $P^*$  im obigen Finanzmarktmodell für eine amerikanische Butterfly Option mit Payoff

$$H_t = (X_t - 2)^+ - 2(X_t - 10)^+ + (X_t - 18)^+, \quad t \in \{0, 1, 2\}.$$

- (iii) Definieren Sie die minimale optimale Stoppzeit  $\tau_{\min}$  und berechnen Sie diese für den gegebenen Claim  $H$  im obigen Finanzmarktmodell.
- (iv) Stimmt im obigen Finanzmarktmodell der Preisprozess der amerikanischen Butterfly Option mit dem der europäischen überein? Begründen Sie!