Aufgabensammlung zur VU Ökonometrie II
SS 2014

Ulrike Schneider

1 Aufgaben zu Kapitel 1

1.1) Zeigen Sie unter den Annahmen A2 und B2 für das lineare Regressionsmodell mit stochastischen Regressoren die Existenz folgender Momente:

$\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(XX')$, $\mathrm{E}(X'u)$, $\mathrm{E}(X^+u)$, $\mathrm{E}(X^+uu'(X^+)')$, $\mathrm{E}(\hat{\sigma}^2_{\mathrm{LS}}(X'X)^{-1})$

Hinweis: Sie können vermutlich die meisten Schritte zusammenfassen, indem Sie sich einmal überlegen, dass folgende (nicht überraschende) Aussagen gelten:

(a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine zufällige Matrix, sodass $\mathrm{E}(A'A)$ existiert, so besitzen die Komponenten von A endliche 2. Momente.

(b) Besitzen die Einträge der zufälligen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ endliche 2. Momente, so existiert $\mathrm{E}(AB)$.

1.2) Wiederholen Sie verschiedene Konvergenzbegriffe für Folgen von Zufallsvariablen (fast sichere Konvergenz, Konvergenz im quadrat. Mittel, Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, Konvergenz in Verteilung) und die wichtigsten Aussagen darüber, welche Konvergenzarten (und unter welchen Bedingungen) welche anderen Konvergenzarten implizieren.

1.3) Zeigen Sie, dass Satz 1.2 auch noch gilt, wenn die Bedingungen B1 und B2 durch folgende Annahmen ersetzt werden:

(a) $\mathrm{E}(u) = 0$, $\mathrm{E}(uu') = \sigma^2\mathbb{I}_T$

(b) Die Regressoren $\{x(t), x(t-1), x(t-2), \dots\}$ und die vorangegangenden Fehler $\{u_{t-1}, u_{t-2}, u_{t-3}, \dots\}$ sind unabhängig von $\{u_t, u_{t+1}, u_{t+2}, \dots\}$.
[Diese Bedingung wird manchmal prädeterminiert oder auch exogen genannt.]

Hinweis: überlegen Sie, dass $X'u = \sum_{t=1}^{T} u_t x(t)'$ und $X'X = \sum_{t=1}^{T} x(t)'x(t)$ gilt und zeigen Sie (analog zur VO), dass

$$\frac{1}{T^2}\mathrm{E}(X'uu'X) \longrightarrow 0$$

1.4) Wiederholen Sie den Satz vom Cramer-Wold device.

$\boxed{2}$ Aufgaben zu Kapitel 2

2.1) Diskutieren Sie Kapitel 4.8.3 aus Cameron & Trivedi (2005) (heuristischer Zugang zum IV-Schätzer im Fall $l = k = 1$).

2.2) Berechnen Sie den GIV-Schätzer $\hat{\beta}_{\mathrm{GIV}}$ aus der folgenden Prozedur.

- Regressiere X auf Z und bilde die gefitteten Werte $\hat{X}_Z$.
- Regressiere y auf $\hat{X}_Z$.

Zeigen Sie außerdem, dass für den Fall $l = k$ der GIV-Schätzer mit dem IV-Schätzer übereinstimmt.

2.3) Zeigen Sie, dass $\hat{\beta}_{\mathrm{GMM}} = (X'ZW_TZ'X)^{-1}X'ZW_TZ'y$ gilt. Welche Annahmen benötigen Sie dazu?

2.4) Zeigen Sie anhand eines Simulationsbeispiels, wie der IV-Schätzer $\hat{\beta}_{\mathrm{IV}}$ den OLS-Schätzer verbessert. [Betrachten Sie zum Beispiel das lineare Regressionsmodell $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u_t$ mit $(x_t, u_t, z_t)' \overset{\mathrm{iid}}{\sim} N(0, \Sigma)$, wobei

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & \sigma_2^2 & 0 \\ \rho_2 & 0 & \sigma_3^2 \end{pmatrix}.$$

Wählen Sie die Parameter geeignet, sodass Σ positiv definit ist. Als Instrument für x_t können Sie dann z_t verwenden.]

Überlegen Sie, welche Größe der OLS-Schätzer in diesem Beispiel eigentlich schätzt.

2.5) Beweisen Sie Konsistenz und asymptotische Normalität des GMM-Schätzers (Satz 2.1) analog zum Beweis von Satz 1.5.

2.6) Zeigen Sie: Ist $z \sim N(0, \mathbb{I}_n)$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und idempotent, so gilt $z'Az \sim \chi^2_{\mathrm{tr}(A)}$, wobei $\mathrm{tr}(A)$ die Spur von A bezeichnet.

2.7) Zeigen Sie, dass für $\hat{u} = y - X\hat{\beta}$ der Schätzer

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{T}\hat{u}'\hat{u}$$

unter Annahme $(N1)_{\mathrm{GMM}}$ konsistent für $\sigma^2 := \mathrm{E}(u_t^2)$ ist – vorausgesetzt es existieren 2. Momente für u_t und $x(t)$ und $\hat{\beta}$ ist ein konsistenter Schätzer für β.

Hinweis: Schreiben (zeigen) Sie $\hat{u}_t = u_t - x(t)(\hat{\beta} - \beta)$ und quadrieren Sie diesen Ausdruck bevor Sie über t summieren.

2.8) Verwenden Sie den Datensatz *USConsump1993* aus dem R-Paket *AER* und schätzen Sie die Gleichung (Keynesian consumption function)

$$\mathtt{expenditure} = \beta_1 + \beta_2\,\mathtt{income}_t + u_t$$

(a) mit OLS und

(b) mit IV mithilfe des Instruments ***investment***, das durch ***income*** $=$ ***expenditure*** $+$ ***investment*** gegeben ist.

(c) Führen Sie einen sog. Hausman-Test durch, um zu überprüfen, ob ein Endogenitätsproblem vorliegt (also der IV-Schätzer tatsächlich gebraucht wird): Unter H_0: „kein Endogenitätsproblem", gilt

$$(\hat{\beta}_{\mathrm{IV}} - \hat{\beta}_{\mathrm{LS}})'(\hat{V}_{\mathrm{IV}} - \hat{V}_{\mathrm{LS}})^{-1}(\hat{\beta}_{\mathrm{IV}} - \hat{\beta}_{\mathrm{LS}}) \xrightarrow{d} \chi^2_k,$$

wobei $\hat{V}_{\mathrm{LS}}$ bzw. $\hat{V}_{\mathrm{IV}}$ (sinnvolle) Schätzer für die VC-Matrix von $\hat{\beta}_{\mathrm{LS}}$ bzw. $\hat{\beta}_{\mathrm{IV}}$ sind.

3 Aufgaben zu Kapitel 3

3.1) Wiederholen Sie das Frisch-Waugh Theorem.

3.2) Schreiben Sie die Matrizen $E_{NT} := I_N \otimes e_T$ und $J_{NT} := I_N \otimes e_T e_T'$ und ihre Dimensionen an, wobei $e_T := (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^T$.

3.3) Zeigen Sie, dass

$$\hat{\beta}_{\mathrm{W}} = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)'(x_{it} - \bar{x}_i) \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)'(y_{it} - \bar{y}_i)$$

gilt.

3.4) Zeigen Sie Satz 3.1 (iii).

3.5) Zeigen Sie die verbleibenden Punkte aus Satz 3.4.

3.6) Fitten Sie verschiedene Paneldatenmodelle für den Datensatz ***Mom.dat*** aus Cameron & Trivedi (Kapitel 21.3) und testen Sie zwischen den Modellen. Dabei sollen Sie jeweils die Variable ***lnhrs*** (log of annual hours worked) auf ***lnwg*** (log of hourly wage) [und ev. weitere Variable] regressieren.