Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Personenversicherungsmathematik (WS 2011)
Blatt 10

1. Betrachten Sie einen Random Walk auf den Kanten einer dreiseitigen Pyramide (Tetraeder) mit den Eckpunkten u, v, s, t. Ein Teilchen beginnt an der Ecke v und springt mit einer Wahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{3}$ zu jeder der drei angrenzenden Ecken. Wie groß ist die mittlere Zeit bis das Teilchen wieder an den Ausgangspunkt zurückgekehrt ist? Wie groß ist die mittlere Zeit bis das Teilchen den benachbarten Eckpunkt s erreicht?

2. Nehmen Sie an, dass die unausgeglichenen Kopfschäden identisch mit den ausgeglichenen Kopfschäden sind. Zeigen Sie, dass $G^\tau = K^\tau_{x_0}$ mit
$$G^\tau = \frac{S^\tau}{\sum_x L_x k^\tau_x}$$
übereinstimmt.

3. Ermitteln Sie die Entwicklung der Versicherungsgesamtheit l_x mit Hilfe der Sterbewahrscheinlichkeiten der Österreichischen Sterbetafel 2000/02 für einen Mann mit $20 \leq x \leq 100$ und für die Stornowahrscheinlichkeit w_x gegeben durch
   (a) $w_x = 0.06$ für $20 \leq x \leq 100$,
   (b) w_x linear fallend von $w_{20} = 0.1$ auf $w_{50} = 0.01$, dann $w_x = 0.01$ für $51 \leq x \leq 100$.

4. Betrachten Sie eine nach Art der Lebensversicherung betriebene Krankenversicherung. Bei dieser Krankenversicherung sei ein Anstieg der Prämien um $j\%$ jährlich und der Leistungen um $k\%$ jährlich von vorneherein berücksichtigt. Dabei sollen die variablen und fixen Zuschläge jährlich wie die Prämie steigend einkalkuliert werden. Leiten Sie eine Formel für die Bruttojahresprämie des Neugeschäfts für eine solche dynamische Prämienkalkulation mit Hilfe von Kommutationszahlen her.
   Hinweis: Verwenden Sie einen modifizierten Diskontierungsfaktor.

5. Betrachten Sie die (stochastischen) Gesamtjahresleistungen S_τ, $1 \leq \tau \leq n$, in $n \geq 2$ unterschiedlichen Versicherungsbeständen mit Leistungsart τ innerhalb einer Versicherung. Es gelte $S = \sum_{\tau=1}^n S_\tau$ wobei die S_τ stochastisch unabhängig seien.
   (a) Zeigen Sie die Gleichung
$$V(S) = \frac{\sqrt{\sum_{\tau=1}^n V(S_\tau)^2 L_\tau^2 \mu_\tau^2}}{\sum_{\tau=1}^n L_\tau \mu_\tau}$$

für den Variationskoeffizienten V (d.h. die Standardabweichung dividiert durch den Erwartungswert) von S, wenn für jeden Teilversichertenbestand $\tau = 1, \ldots, n$ die folgenden Parameter vorgegeben sind: es gibt L_τ Versicherte je Leistungsart τ und der erwartete Kopfschaden ist gegeben durch $\mu_\tau = \mathbb{E}[S_\tau / L_\tau]$.

(b) Beweisen Sie die Abschätzungen:

- $V(S) \leq \max_{\tau=1,\ldots,n} V(S_\tau)$,
- $V(S) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \min_{\tau=1,\ldots,n} V(S_\tau)$.

Hinweis: Für die zweite Ungleichung verwenden Sie $Q_\tau = \frac{\mu_\tau L_\tau}{\sum_{\sigma=1}^n L_\sigma \mu_\sigma}$, $\tau = 1, \ldots, n$.

6. Betrachten Sie einen Versichertenbestand mit L versicherten Personen. Nehmen Sie an, dass der Variationskoeffizient der vom einzelnen Versicherten jährlich verursachten Versicherungsleistungen den Wert 2 nicht überschreitet und dass die einzelnen Versicherungsleistungen i.i.d. sind. Leiten Sie die Mindestgröße L her, für die die Wahrscheinlichkeit, dass die Gesamtjahresleistung des Versichertenbestandes von ihrem Erwartungswert um mehr als 10% abweicht, nicht mehr als 5% beträgt.
Hinweis: Tschebyscheff Ungleichung.