Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Personenversicherungsmathematik (WS 2011) Blatt 11

1. Betrachten Sie zusätzlich zu den bereits eingeführten Kommutationszahlen die Kommutationszahlen $O_x := D_x k_x$ und $U_x := \sum_{k=0}^{\omega-x} O_{x+k}$. Zeigen Sie, dass für die Altersrückstellung ${}_mV_x$ gilt:
$$ {}_mV_x = \Big(\frac{U_{x+m}}{N_{x+m}} - \frac{U_x}{N_x} \Big) \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}} G. $$

2. Zeigen Sie: Die Altersrückstellung im Jahr $m+1$ läßt sich rekursiv darstellen durch
$$ {}_{m+1}V_x = \frac{P_x - K_{x+m} + {}_mV_x}{v p_{x+m}}. $$

3. Eine versicherte Person hat im Alter von 30 Jahren eine nach Art der Lebensversicherung betriebenen Tarif abgeschlossen. Bestimmen Sie aufgrund der Angaben in der folgenden Tabelle die Altersrückstellung zum Alter von 36 Jahren. Die jährliche Nettoprämie beträgt 1200 €. Seit Vertragsbeginn hat keinerlei Vertrags- oder Beitragsänderung stattgefunden.

x	D_x	K_x
30	162 530	913
31	150 649	931
32	139 765	948
33	129 789	965
34	120 636	980
35	112 231	991
36	104 507	999

4. Seien die Annahmen von Beispiel 5 der 10. Übung erfüllt. Begründen sie, weshalb die Abschätzung für den Variationskoeffizienten
$$ V(S) \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{j=1,\dots,n} V(S_j) $$
nicht allgemein gültig ist.

5. Betrachten Sie die zufälligen Leistungsbeiträge eines Versicherungsnehmers für die Leistungsart τ. Sei Y die Summe der Rechnungsbeiträge eines Versicherungsnehmers pro Jahr und $q \in (0,1)$ die Wahrscheinlichkeit für die Leistungsfreiheit eines Versicherungsnehmers. Erstattet werden 30% der Rechnungsbeiträge. Zusätzlich wird die Erstattung pro Jahr auf einen Betrag $M > 0$ begrenzt.

(a) Geben Sie eine Formel für die Erstattungsfunktion Z in Abhängigkeit von Y und M an. Begründen Sie, weshalb bei einer (fiktiven) Erhöhung der tariflichen Obergrenze M um einen Faktr $\mu > 1$ die entsprechenden Erwartungswerte $\mathbb{E}[Z]$ nicht um einen größeren Faktor wachsen können.

(b) Sei die Verteilungsfunktion der positiven Rechnungsbeträge $F_{Y_+}(y) = \mathbb{P}[Y_+ \leq y]$. Bestimmen Sie hieraus in Abhängigkeit vom Parameter q die Verteilungsfunktion von Y und in Abhängigkeit von M die Verteilungsfunktion von Z.

6. Berechnen Sie die zufälligen erstattungsfähigen Aufwendungen Y eines Versicherungsnehmers in einem Leistungstarif τ ohne absolute Selbstbeteiligung. Sei $q \in (0, 1)$ die Wahrscheinlichkeit für Leistungsfreiheit im Tarif τ, d.h. die Wahrscheinlichkeit eines Versicherungsnehmers, in einem Beobachtungsjahr keine erstattungsfähigen Aufwendungen aufzuweisen.

   (a) Es wird vorausgesetzt, dass für einen speziellen Verischertenbestand positive Krankheitskosten Y_+ exponentialverteilt sind mit dem Parameter $\lambda > 0$. Bestimmen Sie diesen Parameter λ speziell für $\mathbb{E}[Y] = 1810$ € und $q = 0.072$. Ermitteln Sie hieraus außerdem die Varianz.

   (b) Betrachten Sie außerdem einen Leistungstarif τ_s mit den gleichen Leistungen wie τ, aber mit einem jährlichen absoluten Selbstbehalt $s > 0$. Berechnen sie zunächst formelmäßig und dann speziell für $s = 500$ € die Wahrscheinlichkeit q_s, dass ein Versicherungsnehmer im Tarif τ_s leistungsfrei ist mit den Werten für λ und q aus (a).