Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Personenversicherungsmathematik (WS 2011)
Blatt 3

1. Seien $N_1, \ldots, N_n$ unabhängige poissonverteilte Zufallsvariablen mit $N_i \sim \mathrm{P}(\lambda_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ und $\lambda_i > 0$. Bestimmen Sie die Verteilung von $N := N_1 + \cdots + N_n$.

2. Seien $N_1, \ldots, N_n$ unabhängige binomialverteilte Zufallsvariablen mit $N_i \sim \mathrm{B}(n_i, p)$ für $i = 1, \ldots, n$ und $n_i \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$.

3. Der Schaden, der in Bezug auf die Police h entsteht, werde mit S_h bezeichnet. Die 3 möglichen Werte von S_h seien die folgenden:
$$S_h = \begin{cases} 0, & \text{falls die versicherte Person } (x) \text{ überlebt,} \\ 300, & \text{falls die versicherte Person } (x) \text{ die Police zurückkauft,} \\ 2000, & \text{falls die versicherte Person } (x) \text{ stirbt.} \end{cases}$$
Die Sterbewahrscheinlichkeit sei $q_{1,x} = 0.002$, die Wahrscheinlichkeit eines Rückkaufes sei $q_{2,x} = 0.18$ und die Überlebenswahrscheinlichkeit sei $p_x = 1 - q_{1,x} - q_{2,x}$. Verwenden Sie die Normalapproximation, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass die Gesamtsumme von 6 unabhängigen und identisch verteilten Policen $S = S_1 + \cdots + S_6$ den Wert 600 übersteigt. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem exakten Ergebnis.

4. Betrachten Sie 1000 Veträge mit möglichen unabhängigen Schäden $Y_1, \ldots, Y_{1000}$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.01$ entsteht bei einem Vertrag ein Schaden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht bei keinem Vetrag ein Schaden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 10 Schäden entstehen? Berechnen Sie jeweils zuerst den genauen Wert und approximieren Sie dann mit der Poissonverteilung.

5. Zeigen Sie, dass die Poisson-, Binomial- und die negative Binomialverteilung die einzigen Verteilungen in $\mathbb{N}_0$ sind, die eine Panjer$(a, b, 0)$-Verteilung sind und bestimmen Sie jeweils die Konstanten a und b.

6. Betrachten Sie die erweiterte logarithmische Verteilung ELog(m, p) mit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $p \in (0, 1]$, die gegeben ist durch
$$q_n = \begin{cases} 0 & 0 \leq n < m, \\ \frac{\binom{n}{m}^{-1} p^n}{\sum_{j=m}^{\infty} \binom{j}{m}^{-1} p^j} & n \geq m. \end{cases}$$
Zeigen Sie:
   (a) $\sum_{j=m}^{\infty} \binom{j}{m}^{-1} < \infty$,

(b) $\mathrm{ELog}(m,p)$ gehört zur Panjer$(p, -mp, m)$-Klasse.

7. Betrachten Sie die erweiterte negative Binomialverteilung $\mathrm{ENB}(m,v,p)$ mit $m \in \mathbb{N}$, $v \in (-m, -m+1)$, $p \in (0,1]$, die gegeben ist durch

$$q_n = \begin{cases} 0 & 0 \leq n < m, \\ \frac{\binom{v+n-1}{n} p^n}{(1-p)^{-v} - \sum_{j=0}^{m-1} \binom{v+j-1}{j} p^j} & n \geq m. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) q_n ist wohldefiniert und es gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \binom{v+n-1}{n} p^n = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \binom{-v}{n} (-p)^n = (1-p)^{-v}.$$

(b) $\mathrm{ENB}(m, vp)$ gehört zur Panjer$(p, p(v-1), m)$-Klasse.