Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Personenversicherungsmathematik (WS 2011)
Blatt 4

1. Betrachten Sie die erweiterte negative Binomialverteilung ENB(m, v, p) mit $m \in \mathbb{N}$, $v \in (-m, -m+1)$, $p \in (0, 1]$, die gegeben ist durch

$$q_n = \begin{cases} 0 & 0 \leq n < m, \\ \frac{\binom{v+n-1}{n} p^n}{(1-p)^{-v} - \sum_{j=0}^{m-1} \binom{v+j-1}{j} p^j} & n \geq m. \end{cases}$$

   Zeigen Sie:

   (a) q_n ist wohldefiniert und es gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_0} \binom{v+n-1}{n} p^n = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \binom{-v}{n} (-p)^n = (1-p)^{-v}.$$

   (b) ENB(m, vp) gehört zur Panjer$(p, p(v-1), m)$-Klasse.

Für eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable X ist die *wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion* definiert durch

$$m_X : \begin{cases} [0,1] \to [0,1], \\ \quad t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) t^n. \end{cases}$$

Insbesondere gilt $m_X(t) = \mathbb{E}[t^X]$, $t \in [0, 1]$.
Für eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable Y ist die *momenterzeugende Funktion* definiert durch

$$M_Y : \begin{cases} D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ \quad t \mapsto \mathbb{E}[e^{tY}], \end{cases}$$

wobei $D := \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[e^{tY}] < \infty\}$.

2. Sei X eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass m_X monoton wachsend und stetig ist, und für alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$0 \leq m_X(t) \leq m_X(1) = 1.$$

   Zeigen Sie, dass die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion m_X die Verteilung von X eindeutig bestimmt. Zeigen Sie weiters, dass m_X auf dem Intervall $[0, 1)$ unendlich oft differenzierbar ist mit

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{m_X^{(k)}(0)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

3. Sei N eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable mit $q_n := \mathbb{P}(N = n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, und $k := \inf\{j \in \mathbb{N}_0 : \ q_j > 0\} \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\frac{m_N^{(l)}(t)}{l!} = \sum_{j=k}^{\infty} q_j \binom{j}{l} t^{j-l}, \quad l \in \mathbb{N}_0,$$

und daher

$$\frac{m_N^{(l)}(t)}{l!} - q_k \binom{k}{l} t^{k-l} = \sum_{j=k+1}^{\infty} q_j \binom{j}{l} t^{j-l}, \quad l \in \mathbb{N}_0. \tag{1}$$

4. Sei N eine nichtausgeartete $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable mit $q_n := \mathbb{P}(N = n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, und $a, b \in \mathbb{R}$ sowie $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass Folgende Aussagen äquivalent sind:

   (a) N ist aus der Panjer (a, b, k)-Klasse.

   (b) Für jedes $l \geq 1$ erfüllt m_N die Differentialgleichung

   $$(1 - at)h^{(l)}(t) = (la + b)h^{(l-1)}(t) + q_k \binom{k}{l} l! t^{k-l}$$

   mit $t \in [0, 1)$ und den Anfangswertbedingungen $h^{(j)}(0) = 0$ für alle $0 \leq j \leq k - 1$.

   (c) m_N erfüllt die Differentialgleichung

   $$(1 - at)h^{(k+1)}(t) = \big((k + 1)a + b\big)h^{(k)}(t)$$

   mit $t \in [0, 1)$ und den Anfangswertbedingungen $h^{(j)}(0) = 0$ für alle $0 \leq j \leq k - 1$.

   Hinweis: Um $(a) \Rightarrow (b)$ zu zeigen verwenden Sie die definierenden Eigenschaften der Panjaer (a, b, k)-Klasse um die rechte Seite von Gleichung (1) umzuformen.

5. Sei $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, wobei $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine i.i.d. Folge von $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen ist und unabhängig von der $\mathbb{N}_0$-wertigen Zufallsvariable N. Zeigen Sie, dass

   $$M_S(t) = M_N(\ln M_{X_1}(t)),$$

   dort wo die momenterzeugenden Funktionen existieren. Sind $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ und N jeweils quadratisch integrierbar, dann zeigen Sie weiters

   $$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1], \qquad \text{sowie} \qquad \mathbb{V}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{V}[X_1] + \mathbb{E}[X_1]^2\mathbb{V}[N].$$

6. Sei X eine $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable, sodass $\mathbb{P}\big(X \in [0, \infty)\big) = 1$ gilt. Zeigen Sie, dass dann die momenterzeugende Funktion auf dem Intervall $(-\infty, 0]$ existiert. Welcher Zusammenhang besteht daher zwischen der momenterzeugenden Funktion und der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion im Falle einer $\mathbb{N}_0$-wertigen Zufallsvariable?

7. Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion für binomial-, negativbinomial- und Poisson-verteilte Schadenszahlen N.