Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

Übung Personenversicherungsmathematik (WS 2011)
Blatt 6

1. Betrachten Sie eine Stop-loss Rückversicherung mit Nettoprämie $\rho(\beta) = \mathbb{E}[(S-\beta)_+]$ wobeie $\beta \in \mathbb{N}$ und S eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable ist. Zeigen Sie, dass folgende Rekursionsformel gilt:
$$\mathbb{E}[(S-\beta)_+^2] = \mathbb{E}[(S-(\beta-1))_+^2] - 2\rho(\beta-1) + 1 - \mathbb{P}(S \le \beta - 1).$$

2. Betrachten Sie eine Stop-loss Rückversicherung mit Nettoprämie $\rho(\beta) = \mathbb{E}[(S-\beta)_+]$, wobei $\beta \in \mathbb{N}$, $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen ist mit $\mathbb{P}(X_j = 1) = \mathbb{P}(X_j = 2) = \frac{1}{2}$, $j \in \mathbb{N}$, und $N \sim \mathrm{P}(1)$. Weiters sei $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$ der $\mathbb{N}$-wertige Gesamtschaden im kollektiven Modell, der durch eine zusammengesetzte Poissonverteilung modelliert wird. Berechnen sie $\rho(\beta)$ rekursiv für $\beta = 1, \ldots, 5$ mittels Panjer-Rekursion.

3. Sei $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$, wobei $N \sim \mathrm{NB}(3.5, 0.7)$ und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_j = 0) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(X_j = 1) = \frac{1}{2}$ und $\mathbb{P}(X_j = 2) = \frac{1}{6}$ für $j \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(S = x)$ für $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ mittels Panjer-Rekursion.

4. Sei $S = \sum_{j=1}^{N} X_j$ der $\mathbb{N}_0$-wertige Gesamtschaden im kollektiven Modell wobei $N \sim \mathrm{P}(3)$ und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von i.i.d. Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_j = i) = \frac{1}{3}$ für $i = 1, 2, 3$ und $j \in \mathbb{N}$ ist. Betrachten Sie eine Stop-loss Rückversicherung mit Nettoprämie $\rho(\beta) = \mathbb{E}[(S-\beta)_+]$ für $\beta \in \mathbb{N}$. Überlegen Sie sich warum man für $\beta \notin \mathbb{N}$ $\rho(\beta)$ linear interpolieren darf und berechnen sie $\rho(2.5)$.

5. Betrachten Sie eine Stop-loss Rückversicherung mit Nettoprämie $\rho(\beta) = \mathbb{E}[(S-\beta)_+]$.
   (a) Sei $S \sim \mathrm{N}(100, 10^2)$ und $\beta = 115$. Berechnen Sie die Nettoprämie.
   (b) Sei $S \sim \mathrm{N}(100, 10^2)$ und $\beta = 115$. Berechnen Sie die Nettoprämie unter der Annahme, dass in der nächsten Periode eine Inflation von 10% vorliegt.
   (c) Sei $\ln S \sim \mathrm{N}(2, 2^2)$ und $\beta = 115$. Berechnen Sie die Nettoprämie.