Technische Universität Wien
Institut für Wirtschaftsmathematik
Finanz- und Versicherungsmathematik

# Übung Personenversicherungsmathematik (WS 2011)
# Blatt 9

1. Betrachten Sie die oberen und unteren Konfidenzlimites $\lambda_{\mathrm{o}}(n,w)$ und $\lambda_{\mathrm{u}}(n,w)$ wie in der Vorlesung. Zeigen Sie, dass $\lambda_{\mathrm{o}}(n,w)$ und $\lambda_{\mathrm{u}}(n,w)$ die eindeutig bestimmten Lösungen von
$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = w \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = w,$$
sind.

2. Zeigen Sie, dass eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen in einer abzählbaren Menge $S$ eine Markovkette ist! Wann ist sie homogen?

3. Eine Person würfelt beliebig oft mit einem fairen Würfel, d.h. $\mathbb{P}(X = j) = \frac{1}{6}$, $j \in \{1, \ldots, 6\}$. Sei $X_n$ das bei den ersten $n$ Würfen erzielte Maximum. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markovkette ist und finden Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(m, m+n)$.

4. Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine einfache Irrfahrt mit $S_0 = 0$ und $\mathbb{P}(X_k = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X_k = -1) = 1 - p$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $M_n = \max\{S_k : 0 \le k \le n\}$ der größte dabei erreichte Punkt. Zeigen Sie, dass $Y_n = M_n - S_n$ eine Markovkette ist. Ist auch $M_n$ eine Markovkette?

5. Gegeben sei eine Markovkette mit der Übergangmatrix ($0 \le p \le \frac{1}{2}$)
$$P = \begin{pmatrix} 1-2p & 2p & 0 \\ p & 1-2p & p \\ 0 & 2p & 1-2p \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie die Übergangsschritte $p_{ij}(m, m+n)$ für $n$ Schritte der Markovkette.

6. Sei $X$ eine Markov-Kette, und $\{n_r : r \ge 0\}$ eine aufsteigende Folge von ganzen Zahlen. Zeigen Sie, dass $Y_r = X_{n_r}$ eine (möglicherweise inhomogene) Markov-Kette darstellt (d.h. dass Teilfolgen einer Markov-Kette wieder Markov-Ketten sind)! Finde weiters die Übergansmatrix von $Y$, wenn $n_r = 2r$ und $X$ ein einfacher Random Walk ist.