Übungen „Spieltheoretische Modellierung“

7-tes Übungsblatt solved

07.01.2013

Bestimmen Sie sämtliche evolutionär stabilen Strategien (gibt es überhaupt welche?) der folgenden symmetrischen Spiele a) zuerst direkt (durch Nachprüfen der Bedingungen) und danach b) durch Aufstellen der zugehörigen Replikatorgleichungen):

1.

		Spalte 1	Spalte 2
Zeile	1	2	0
	2	0	1

Lösung: $\dot{p}_1 = p_1(1-p_1)[3p_1-1]; d\dot{p}_1/dp_1 = (1-p_1)(3p_1-1)-p_1(3p_1-1)+2p_1(1-p_1)$
$(1,0)$ und $(0,1)$ sind ESS.

2.

		Spalte 1	Spalte 2
Zeile	1	2	0
	2	0	0

Lösung: $\dot{p}_1 = 2p_1^2(1-p_1); d\dot{p}_1/dp_1 = 4p_1(1-p_1) - 2p_1^2$
$(1,0)$ ist das einzige ESS.

3.

		Spalte 1	Spalte 2
Zeile	1	0	2
	2	1	0

Lösung: $\dot{p}_1 = p_1(1-p_1)[2-3p_1]; d\dot{p}_1/dp_1 = (1-p_1)(2-3p_1)-p_1(2-3p_1)-3p_1(1-p_1)$
$(2/3, 1/3)$ ist das einzige ESS.

4.

		Spalte 1	Spalte 2
Zeile	1	2	0
	2	3	1

Lösung: $\dot{p}_1 = p_1(1-p_1)[-p_1-1]; d\dot{p}_1/dp_1 = (1-p_1)(-p_1-1)-p_1(-p_1-1)-p_1(1-p_1)$
$(0,1)$ ist das einzige ESS.

5.

		Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3
Zeile	1	2	1	1
	2	2	0	3
	3	2	3	0

Lösung: $(1,0,0)$ ist Nash-Strategie. Wenn man nur reine Strategien zulassen würde auch ESS. Jedoch keine ESS, unter den gemischten Strategien, da sie nicht besser gegen $(0,1/2,1/2)$ abschneidet als die gegen sich selbst. $(1,0,0)$ gegen $(0,1/2,1/2)$ ergibt 1, $(0,1/2,1/2)$ gegen $(0,1/2,1/2)$ hingegen $3/2$. $(0,1/2,1/2)$ ist (keine strikte) Nash-Strategie. Jede andere Strategie $(p,q,1-p-q)$ mit $p>0$ erzielt gegen $(0,1/2,1/2)$ den Fitnesswert $3/2-p/2$. Jedoch schneidet $(0,1/2,1/2)$ gegen jede Strategie $(0,r,1-r)$ besser ab $(3/2)$ als die gegen sich selbst $(6r(1-r))$. Daher ist $(0,1/2,1/2)$ eindeutige ESS.

6.

		Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3
Zeile	1	0	3	0
	2	1	0	0
	3	0	0	1

Lösung: $(0,0,1)$ ist strikte Nash-Strategie somit ESS. $(3/4,1/4,0)$ ist eine (keine strikte) Nash-Strategie. Jede Strategie $(r,1-r,0)$ schneidet gegen $(3/4,1/4,0)$ genau so gut ab, wie diese gegen sich selbst. Da jedoch $(3/4,1/4,0)$ gegen $(r,1-r,0)$, mit $r\neq 3/4$, besser abschneidet, als die gegen sich selbst, ist $(3/4,1/4,0)$ eine ESS. Anderer Lösungsweg:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

7.

		Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3
Zeile	1	0	0	a
	2	0	a	0
	3	a	0	0

Lösung: Für $a>0$ ist $(0,1,0)$ strikte Nash-Strategie somit ESS. $(1/2,0,1/2)$ keine strikte Nash-Strategie, jedoch durchaus eine ESS, da

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2a < 0$$

Für $a<0$ sind $(1,0,0)$ und $(0,0,1)$ (keine strikten) Nash-Strategien, da jeweils die Strategien $(r,1-r,0)$, mit $r<1$, und $(0,1-s,s)$, mit $s<1$, genau so gut gegen $(1,0,0)$ respektive $(0,0,1)$ abschneiden, wie die gegen sich selbst. Da jedoch $(1,0,0)$ und $(0,0,1)$ besser gegen die Strategien $(r,1-r,0)$, mit $r<1$, respektive $(0,1-s,s)$, mit $s<1$, abschneiden, als diese gegen sich selbst, sind $(1,0,0)$ und $(0,0,1)$ ebenfalls ESS.

8.

		Spalte 1	2	3
Zeile	1	2	0	3
	2	2	0	2
	3	1	0	1

Lösung: Alle Strategien $(r, 1-r, 0)$ sind Nash-Strategien, jedoch keine ESS, da

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Es gibt überhaupt keine ESS in diesem Spiel!

9.

		Spalte 1	2	3
Zeile	1	0	2	2
	2	0	1	0
	3	0	0	1

Lösung: $(1,0,0)$ ist (keine strikte) Nash-Strategie. Jede Strategie $(p, q, 1-p-q)$ erreicht gegen $(1,0,0)$ den gleichen Fitnesswert 0, wie $(1,0,0)$ gegen sich selbst. Lässt man nun $(1,0,0)$ gegen $(p, q, 1-p-q)$ antreten und zieht vom erreichten Fitnesswert denjenigen ab, den $(p, q, 1-p-q)$ gegen sich selbst erreicht, so erhält man:

$$(p-1)^2 + 2q(1 - p/2 - q) > 0,$$

d.h. $(1,0,0)$ ist ESS. Da weiters $(1,0,0)$ jede weitere reine Strategie schwach dominiert, kann es keine Strategie der Form $(0, r, 1-r)$ geben, die ein ESS wäre.