Spieltheoretische Modellierung Übung 2016

<u>Verdeckte Zweitpreisauktion (sealed-bid second-price auction):</u> Ein nicht teilbares Objekt steht zum Verkauf. Bezeichnen wir die Menge der (potentiellen) Käufer in der Auktion mit dem Symbol N. Jeder Käufer i misst dem Objekt einen Wert v_i zu, den er höchsten bereit ist für das Objekt zu zahlen (wo er/sie indifferent ist zwischen ohne dem Objekt wegzugehen oder es um den Preis v_i zu erwerben). Der Wert v_i ist des/der i-ten SpielerIns Private Value (private value), und kann von absolut subjektiven Überlegungen, wie Präferenzen über gewisse künstlerische Ausfertigung oder Stil herrühren, kann aber auch rational nachvollziebar - wie erwarteter Profit - sein (z.B. das Objekt kann eine Mobiltelefonfrequenz sein). Diese Sachlage motiviert uns zu der Modellierungsannahme, dass jede(r) SpielerIn i ihren (seinen) Private Value v_i kennt, aber nicht weiß, welche Werte die anderen SpielerInnen dem Objekt zumessen. Das schließt aber nicht aus, dass er/sie die Private Values der anderen SpielerInnen einschätzt und/oder zu glauben die Private Values der anderen SpielerInnen mit einem gewissen Maß an Sicherheit zu kennen. (Hier werden wir dann später mit dem spieltheoretischen Begriff „Belief" arbeiten).

Jede(r) SpielerIn i bietet einen Preis b_i (ihre/seine Aktionen; Aktionsraum z.B. von 0 bis zu einer vorgegebenen oberen Schranke). Jede(r) SpielerIn i notiert von allen anderen SpielerInnen unbemerkt sein Angebot b_i (Gebot, Kaufangebot; engl. BID) steckt den Zettel in einen Umschlag und übergibt den versiegelten (sealed) Umschlag dem/der SpielleiterIn (AuktionärIn).

Der/die GewinnerIn der Auktion (=bekommt das Objekt) ist die/der SpielerIn mit dem höchsten Bid. Dies überrascht nicht; aber im Kontrast zu den Auktionen, die wir gewöhnlich sehen, zahlt der/die GewinnerIn nicht den Wert des abgegebenen Bids. Stattdessen zahlt er/sie den zweit-höchsten (second-price) gebotenen Preis. Falls zwei oder mehr als zwei SpielerInnen das Höchstgebot abgegeben haben, wird per fairer Lotterie der/die GewinnerIn zufällig ermittelt; in diesem Spezialfall zahlt der/die GewinnerIn des Objekts das Höchstgebot.

In der mathematischen Modellierung definieren wir die Pay-off Funktionen wie folgt fest:

$$u_i(b) = \begin{cases} 0, & b_i < max_{j\in N}\, b_j \\ \dfrac{v_i - max_{j\in N\setminus\{i\}}\, b_j}{\left\|\{k \in N \mid b_k = max_{j\in N}\, b_j\}\right\|}, & b_i = max_{j\in N}\, b_j \end{cases}$$

wobei $b = (b_1, \dots, b_n)$ das Aktionsprofil der $n = \|N\|$ SpielerInnen ist.

Klarerweise ist der/die GewinnerIn der Auktion ein(e) SpielerIn mit einem Bid

$$b_i = max_{j\in N}\, b_j$$

und er/sie hat

$$max_{j\neq i}\, b_j$$

zu zahlen. Definieren wir $B_{-i} \coloneqq max_{j \neq i}\, b_j$ und die Anzahl der AnbieterInnen, welche dieses Bid abgegeben haben mit

$$N_{-i} = \left\| \{ k \neq i \mid b_k = max_{j\neq i}\ b_j \} \right\|$$

so können wir die Pay-off Funktion umformulieren:

$$u_i(b_i, B_{-i}) = \begin{cases} 0 & b_i < B_{-i} \\ \dfrac{v_i - B_{-i}}{N_{-i} + 1} & b_i = B_{-i} \\ v_i - B_{-i} & b_i > B_{-i} \end{cases}$$

8. Skizzieren Sie die Auszahlfunktion (Pay-off) $u_i(b_i, B_{-i})$ für die/den SpielerIn i, falls er/sie die Strategie $b_i = v_i$ spielt. Skizzieren Sie auch die Pay-off Funktionen, wenn die Strategie $b_i < v_i$ bzw. $b_i > v_i$ gespielt werden.

9. Beweisen Sie, dass in der oben beschriebenen verdeckten Zweitpreisauktion die Strategie $b_i = v_i$ alle anderen Strategien schwach dominiert.

10. Betrachten Sie folgendes Spiel in strategischer Form:

	Player II		
Player I	Aktionen	L	R
	T	(2,1)	(2,-20)
	M	(3,0)	(-10,1)
	B	(-100,2)	(3,3)

Ist dieses Bi-Matrixspiel ein Nullsummenspiel? Offensichtlich ist (B,R) eine Nashgleichgewichtslösung (beweisen Sie). Diskutieren Sie. ob nicht für einen ängstlichen (risk-averse) Spieler I das Aktionsprofil (T,L) eine zu bevorzugende Lösung wäre.

11. Betrachten Sie gleiches Spiel wie im vorigem Beispiel. Ermitteln Sie den Maximin Wert

$$\underline{v}_i \coloneqq max_{a_i \in \mathcal{A}_i}\, min_{a_{-i} \in \mathcal{A}_{-i}}\, u_i\,(a_i, a_{-i})$$

für den Spieler II und den Maximin (!!) Wert für den Spieler I. Vergleichen Sie den Maximin Wert des Spielers II mit seinem Pay-off, wenn beide Spieler Maximin spielen.

12. Betrachten Sie folgendes Bi-Matrixspiel in strategischer Form:

		Player II	
Player I	Aktionen	L	R
	T	(3,1)	(0,4)
	B	(2,3)	(1,1)

Berechnen Sie die Maximin Werte der beiden Spieler. Vergleichen Sie die Payoff-Werte der beiden Spieler, wenn beide Maximin Spielen.

Betrachten Sie folgendes Bi-Matrixspiel in strategischer Form:

		Player II	
Player I	Aktionen	L	R
	T	(0,0)	(2,1)
	B	(3,2)	(1,2)

Finden Sie die beiden Nashgleichgewichte des Spiels. Lösen Sie durch sukzessive Elimination dieses Spiel. Was passiert mit den Nashgleichgewichten?

13. Der Spielwert eines 2Personen Nullsummenspiels gegeben durch die Pay-off Matrix A ist 0. Ist es dann notwendigerweise wahr, dass der Spielwert des 2 Personen Nullsummenspiels gegeben durch die Pay-off Matrix –A ebensfalls 0 ist? Wenn die Antwort JA ist, beweisen Sie, wenn die Antwort NEIN ist, dann geben Sie ein Gegenbeispiel.