Spieltheoretische Modellierung Übung 2017

<u>Verdeckte Zweitpreisauktion (sealed-bid second-price auction):</u> Ein nicht teilbares Objekt steht zum Verkauf. Bezeichnen wir die Menge der (potentiellen) Käufer in der Auktion mit dem Symbol N. Jeder Käufer i misst dem Objekt einen Wert v_i zu, den er höchsten bereit ist für das Objekt zu zahlen (wo er/sie indifferent ist zwischen ohne dem Objekt wegzugehen oder es um den Preis v_i zu erwerben). Der Wert v_i ist des/der i-ten SpielerIns Private Value (private value), und kann von absolut subjektiven Überlegungen, wie Präferenzen über gewisse künstlerische Ausfertigung oder Stil herrühren, kann aber auch rational nachvollziebar - wie erwarteter Profit - sein (z.B. das Objekt kann eine Mobiltelefonfrequenz sein). Diese Sachlage motiviert uns zu der Modellierungsannahme, dass jede(r) SpielerIn i ihren (seinen) Private Value v_i kennt, aber nicht weiß, welche Werte die anderen SpielerInnen dem Objekt zumessen. Das schließt aber nicht aus, dass er/sie die Private Values der anderen SpielerInnen einschätzt und/oder zu glauben die Private Values der anderen SpielerInnen mit einem gewissen Maß an Sicherheit zu kennen. (Hier werden wir dann später mit dem spieltheoretischen Begriff „Belief“ arbeiten).

Jede(r) SpielerIn i bietet einen Preis b_i (ihre/seine Aktionen; Aktionsraum z.B. von 0 bis zu einer vorgegebenen oberen Schranke). Jede(r) SpielerIn i notiert von allen anderen SpielerInnen unbemerkt sein Angebot b_i (Gebot, Kaufangebot; engl. BID) steckt den Zettel in einen Umschlag und übergibt den versiegelten (sealed) Umschlag dem/der SpielleiterIn (AuktionärIn).

Der/die GewinnerIn der Auktion (=bekommt das Objekt) ist die/der SpielerIn mit dem höchsten Bid. Dies überrascht nicht; aber im Kontrast zu den Auktionen, die wir gewöhnlich sehen, zahlt der/die GewinnerIn nicht den Wert des abgegebenen Bids. Stattdessen zahlt er/sie den zweit-höchsten (second-price) gebotenen Preis. Falls zwei oder mehr als zwei SpielerInnen das Höchstgebot abgegeben haben, wird per fairer Lotterie der/die GewinnerIn zufällig ermittelt; in diesem Spezialfall zahlt der/die GewinnerIn des Objekts das Höchstgebot.

In der mathematischen Modellierung definieren wir die Pay-off Funktionen wie folgt fest:

$$u_i(b) = \begin{cases} 0, & b_i < max_{j\in N}\, b_j \\ \dfrac{v_i - max_{j\in N\setminus\{i\}}\, b_j}{\left\|\{k \in N \mid b_k = max_{j\in N}\, b_j\}\right\|}, & b_i = max_{j\in N}\, b_j \end{cases}$$

wobei $b = (b_1, \dots, b_n)$ das Aktionsprofil der $n = \|N\|$ SpielerInnen ist.

Klarerweise ist der/die GewinnerIn der Auktion ein(e) SpielerIn mit einem Bid

$$b_i = max_{j\in N}\, b_j$$

und er/sie hat

$$max_{j\neq i}\, b_j$$

zu zahlen. Definieren wir $B_{-i} \coloneqq max_{j \neq i}\, b_j$ und die Anzahl der AnbieterInnen, welche dieses Bid abgegeben haben mit

$$N_{-i} = \left\| \{k \neq i \mid b_k = max_{j \neq i}\; b_j\} \right\|$$

so können wir die Pay-off Funktion umformulieren:

$$u_i(b_i, B_{-i}) = \begin{cases} 0 & b_i < B_{-i} \\ \dfrac{v_i - B_{-i}}{N_{-i} + 1} & b_i = B_{-i} \\ v_i - B_{-i} & b_i > B_{-i} \end{cases}$$

13. Skizzieren Sie die Auszahlfunktion (Pay-off) $u_i(b_i, B_{-i})$ für die/den SpielerIn i, falls er/sie die Strategie $b_i = v_i$ spielt. Skizzieren Sie auch die Pay-off Funktionen, wenn die Strategie $b_i < v_i$ bzw. $b_i > v_i$ gespielt werden.

14. Beweisen Sie, dass in der oben beschriebenen verdeckten Zweitpreisauktion die Strategie $b_i = v_i$ alle anderen Strategien schwach dominiert.

15. **(Inspector Game):** During the 1960s, within the framework of negotiations between the United States (US) and the Union of Soviet Socialist Republics (USSR) over nuclear arms limitations, a suggestion was raised that both countries commit to a moratorium on nuclear testing. One of the objections to this suggestion was the difficulty in supervising compliance with such a commitment. Detecting above-ground nuclear tests posed no problem, because it was easy to detect the radioactive fallout from a nuclear explosion conducted in the open. This was not true, however, with respect to underground tests, because it was difficult at the time to distinguish seismographically between an underground nuclear explosion and an earthquake. The US therefore suggested that in every case of suspicion that a nuclear test had been conducted, an inspection team be sent to perform on-site inspection. The USSR initially objected, regarding any inspection team sent by US as a potential spy operation. At later stages in the negotiations, Soviet negotiators expressed readiness to accept three on-site inspections annually, while American negotiators demanded at least eight on-site inspections. The expected number of seismic events per year considered sufficiently strong to arouse suspicion was 300.

    The model presented in this exercise assumes the following:

    - The USSR can potentially conduct underground nuclear tests on one of two possible distinct dates, labeled A and B, where B is the later date.
    - The USSR gains nothing from choosing one of these dates over the other for conducting an underground nuclear test, and the US loses nothing if one date is chosen over another.
    - The USSR gains nothing from conducting nuclear tests on both of these dates over its utility from conducting a test on only one date, and the US loses nothing if tests are conducted on both dates over its utility from conducting a test on only one date.

- The US may send an inspection team on only one of the two dates, A or B, but not on both.
- The utilities of the two countries from the possible outcomes are:
    - If the Partial Test Ban Treaty (PTBT) is violated by the USSR and the US does not send an inspection team, the US receives -1 and the USSR receives 1.
    - If the PTBT is violated by the USSR and the US sends an inspection team, the US receives $-\alpha$ and the USSR receives $-\beta$; $\alpha > 0$ and $0 < \beta < 1$.
    - If the PTBT is not violated both US and USSR receive 0.

Formulieren Sie ein passendes Bi-Matrixspiel.

16. Diskutieren Sie die „Reaktionskurven" für das Chicken Spiel und das Stag Hunt Spiel aus der Vorlesung (Folie 13 und 15).

17. Betrachten Sie folgendes Bi-Matrixspiel in strategischer Form:

	Player II		
Player I	Aktionen	L	R
	T	(1,1)	(4,0)
	B	(2,10)	(3,5)

Ermitteln Sie graphisch (Reaktionskurven) Nash Gleichgewichte in gemischten Strategien.