Nichtlineare Optimierung UE WS 2012/2013

37. Gegeben sei das folgende quadratische Programmierungsproblem

$$\max f(x) = 8x_1 - {x_1}^2 + 4x_2 - {x_2}^2$$

unter

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

und

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

(a) Verwenden Sie die KKT-Bedingungen zur Ableitung einer optimalen Lösung.

(b) Es wird unterstellt, daß dieses Problem mit dem modifizierten Simplexverfahren zu lösen ist. Formulieren Sie das lineare Programmierungsproblem, das explizit zu bearbeiten ist, und stellen Sie dann die zusätzliche Komplementaritätsrestriktion auf, die automatisch von dem Algorithmus eingehalten wird.

(c) Wenden Sie das modifizierte Simplexverfahren auf das unter Teilaufgabe (b) formulierte Problem an.

38. Gegeben sei das folgende quadratische Programmierungsproblem

$$\max f(x) = 20x_1 - 20{x_1}^2 + 50x_2 - 5{x_2}^2 + 20x_1x_2$$

unter

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & + & 4x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

und

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Nehmen Sie an, daß das Problem mit dem modifizierten Simplexverfahren zu lösen ist.

(a) Formulieren Sie das lineare Programmierungsproblem, das explizit zu bearbeiten ist, und stellen Sie dann die zusätzliche Komplementaritätsrestriktion auf, die automatisch von dem Algorithmus eingehalten wird.

(b) Wenden Sie das modifizierte Simplexverfahren auf das unter Teilaufgabe (a) formulierte Problem an.

39. Gegeben sei das folgende konvexe Optimierungsproblem

$$\max f(x) = 4x_1 + 6x_2 - {x_1}^3 - 2{x_2}^2$$

unter

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & \leq & 8 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14 \end{array}$$

und

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

(a) Beweisen Sie, daß $(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2}\right)$ eine optimale Lösung ist, indem Sie die KKT-Bedingungen zu Hilfe nehmen.

(b) Behandeln Sie dieses Problem als eines der Programmierung bei zerlegbaren Funktionen. Formulieren Sie hierzu ein mathematisches Näherungsmodell, das mit dem Simplexverfahren gelöst werden könnte. Benutzen Sie die ganzzahligen Werte als Knickstellen der stückweise linearen Funktionen.

40. Gegeben sei das folgende konvexe Optimierungsproblem mit linearen Nebenbedingungen

$$\max f(x) = 32x_1 + 50x_2 - 10{x_2}^2 + {x_2}^3 - {x_1}^4 - {x_2}^4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & x_2 & \leq & 11 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 16 \end{array}$$

und

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

   (a) Behandeln Sie dieses Problem als eines der Programmierung bei zerlegbaren Funktionen. Formulieren Sie hierzu ein mathematisches Näherungsmodell, das mit dem Simplexverfahren gelöst werden könnte. Verwenden Sie $x_1 = 0, 1, 2, 3$ und $x_2 = 0, 1, 2, 3$ als Knickstellen der stückweise linearen Funktionen.

   (b) Ziehen Sie die KKT-Bedingungen heran um festzustellen, ob $(x_1, x_2) = (2, 2)$ optimal für das ursprüngliche Problem (nicht für das Näherungsmodell) sein kann.

41. Die Firma *Oilco* möchte bestimmen, wieviel Barrel Öl sie in den beiden kommenden Jahren fördern soll. Wenn *Oilco* im ersten Jahr x_1 Millionen Barrel fördert, kann jedes Barrel für $30 - x_1$ \$ verkauft werden. Wenn *Oilco* im zweiten Jahr x_2 Millionen Barrel fördert, kann jedes Barrel für $35 - x_2$ \$ verkauft werden. Die Kosten, im ersten Jahr x_1 Millionen Barrel zu fördern, betragen ${x_1}^2$ Millionen \$; die Kosten, im zweiten Jahr x_2 Millionen Barrel zu fördern, betragen $2{x_2}^2$ Millionen \$. Insgesamt stehen 20 Millionen Barrel Öl zur Verfügung, und höchstens 250 Millionen \$ können zur Förderung ausgegeben werden.

    Formulieren Sie das entsprechende nichtlineare Programmierungsproblem. Lösen Sie anschließend dieses Problem mit dem Verfahren bei zerlegbaren Funktionen.