Nichtlineare Optimierung UE **WS 2013/2014**

1. Ein Hersteller von Computern produziert sowohl Personal-Computer (PC) als auch Workstations (WS). Eine Marktstudie, die die zentralen Erfolgsfaktoren für den Verkaufserfolg der Computer untersuchen sollte, hat ergeben, daß der Preis die entscheidende Rolle spielt. Eine daraufhin durchgeführte Sensitivitätsanalyse hat folgende Abhängigkeit zwischen Preis p (in GE) und Absatzmenge x ergeben:

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & 8p_1 & = & 240 & \quad (\text{PC}) \\ 3x_2 & + & 18p_2 & = & 1800 & \quad (\text{WS}) \end{array}$$

Die variablen Kosten setzen sich im wesentlichen zusammen aus Personalkosten für die Bedienung der Maschinen und für die Montage sowie Materialkosten. Die Kostensätze betragen bei der Maschinenbedienung $0,7$ GE/Stunde und bei der Montage $0,3$ GE/Stunde. Die einzelnen Produkte belasten die Fertigung unterschiedlich (jeweils auf ein Stück bezogen):

	PC	WS
Montage [h]	3	4
Maschinenbedienung [h]	1	2
Materialkosten [GE]	8,4	17,4

Für die Maschinenbedienung steht eine Kapazität von 450 Stunden zur Verfügung. Die Kapazität soll voll ausgeschöpft werden. Montagekapazität ist kein Engpaßfaktor.

Formulieren Sie das zugehörige NLOP.

2. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei wie folgt definiert:

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \end{array} \right\} \text{ falls } (x,y) \left\{ \begin{array}{c} = \\ \neq \end{array} \right\} (0,0).$$

Berechnen Sie die Hessematrix im Punkt $(0,0)$.

3. Stellen Sie die folgenden Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ graphisch dar und geben Sie die lokalen und globalen Extrempunkte an.

   (a) $f(x) = 1 - x^2$, $M = [-1, 1]$

   (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $M = (0, \infty)$

   (c) $f(x) = \left\{ \begin{array}{c} -1 - x \\ 1 \end{array} \right\}$ falls $\left\{ \begin{array}{c} -1 \leq x < 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$, $M = [-1, 1]$

4. Die Produktionsmenge x einer Firma hängt vom eingesetzten Kapital k folgendermaßen ab:

$$x = f(k) = (k-1)^{\frac{1}{3}} + 1, k \geq 0.$$

   (a) Bestimmen Sie den *Grenzertrag* $(= f'(k))$.

   (b) Untersuchen Sie, auf welchen Intervallen f steigend, fallend, konvex, konkav ist.

   (c) Der Firma entstehen pro Kapitaleinheit $c > 0$ Geldeinheiten an Kosten. Der Erlös durch den Verkauf einer Einheit des Produktes beträgt $p > 0$ Geldeinheiten. Somit lautet der Gewinn der Firma

$$G(k) = pf(k) - ck.$$

   Bestimmen Sie den optimalen Kapitalstock (= jenen Wert $k \geq 0$, bei dem der Gewinn maximiert wird).

5. *(Autofahrt)* Angenommen, Sie wollen von Wien nach Hamburg fahren (etwa 1000 km Autobahn) und leihen daher einen PKW zu einer Leihgebühr von 18 GE pro Stunde. Die Benzinkosten betragen 9 GE pro Liter. Die durchschnittliche Reisegeschwindigkeit x kann von Ihnen im Bereich 50 km/h $\leq x \leq$ 130 km/h gewählt werden. In diesem Geschwindigkeitsbereich gilt für die Strecke z (in km), die Sie mit einem Liter Benzin zurücklegen können, ungefähr

$$z = 14 - \frac{x}{50}.$$

   Welche Durchschnittsgeschwindigkeit müssen Sie einhalten, um möglichst kostengünstig zu fahren?

6. (a) Bestimmen Sie mit dem Newtonverfahren das Minimum der Funktion

$$x\,(\ln(x+1)-1)$$

auf dem Intervall $[0,2]$ (Genauigkeit $\epsilon = 10^{-2}$).

(b) Ist das Newtonverfahren mit Startwert $x_0 = -1$ zur Minimierung von

$$-\frac{1}{5}x^5 + 2x^3 + 11x$$

geeignet?

7. Führen Sie fünf Schritte des Verfahrens nach dem goldenen Schnitt zur Maximierung von

$$-x^2 - 1$$

auf dem Intervall $[-1, 0.75]$ durch.

8. Seien S eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ sowie $f : S \to \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen. Unter der Voraussetzung, daß F eine strikt wachsende Funktion ist, beweisen Sie, daß der Punkt x^* genau dann ein Minimalpunkt von f ist, wenn er ein Minimalpunkt der Funktion $g : S \to \mathbb{R}$ ist, wobei g durch

$$g(x) = F(f(x)), x \in S$$

definiert ist. Verwenden Sie dieses Resultat, um das Minimum der Funktion $e^{x^2-2xy+2y^2-2y+1}$ auf $\mathbb{R}^2$ zu bestimmen.

9. Ein Monopolist produziert ein Produkt und hat zwei Kunden. Wenn q_1 Einheiten für den ersten Kunden produziert werden, so ist der Kunde 1 bereit, einen Preis $70 - 4q_1$ \$ zu zahlen. Wenn q_2 Einheiten für den zweiten Kunden produziert werden, so ist der Kunde 2 bereit, einen Preis $150 - 15q_2$ \$ zu zahlen. Für $q > 0$ sind die Kosten, q Einheiten zu erzeugen, $100 + 15q$ \$. Wieviel soll der Monopolist jedem Kunden verkaufen, um den Profit zu maximieren?

10. *(Produktion)* Sei $Y = F(K, L)$ eine stetig differenzierbare Produktionsfunktion (Y = Produktionsmenge, K = Kapital, L = Arbeitskraft). Weiters seien p der Produktpreis, r die Kapitalkosten (Zinsrate) und w die Lohnkosten. Der Gewinn, der durch Produktion und Verkauf von $F(K, L)$ Einheiten erzielt wird, beträgt

$$G(K, L) = pF(K, L) - rK - wL, K \geq 0, L \geq 0.$$

   (a) Geben Sie die notwendigen Bedingungen für ein Profitmaximum mit $K > 0$ und $L > 0$ an.

   (b) Geben Sie die Lösung der notwendigen Bedingungen für den Fall einer Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$$F(K, L) = cK^{\alpha} L^{\beta}$$

   an, wobei die Parameter die Bedingungen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und $\alpha + \beta \neq 1$ erfüllen.

11. Sei $f(x, y)$ eine auf $S \subseteq \mathbb{R}^n$ definierte differenzierbare Funktion. Um die globalen Extrema von f zu finden, kann man wie folgt vorgehen: Man bestimmt (1) alle stationären Punkte von f auf S und (2) alle Extrempunkte von f am Rand von S (dieser Schritt kann auf die Lösung eindimensionaler min/max Probleme zurückgeführt werden). Schließlich wertet man f an allen in (1) und (2) gefundenen Punkten aus und bestimmt den maximalen bzw. minimalen Wert. Bestimmen Sie mit dieser Methode die globalen Extrema von

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 9$$

auf

$$S = \{(x, y) \,|0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}.$$

12. Wie Beispiel 11 für

$$f(x, y) = 3 + x^3 - x^2 - y^2, S = \left\{(x, y) \,|x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\right\}.$$

13. *(Angebotsduopol)* Zwei Firmen bieten ein und dasselbe Produkt in den Mengen x_1 bzw. x_2 an. Der Preis p ergibt sich gemäß der Nachfragefunktion

$$p = b - a\,(x_1 + x_2)\,,$$

wobei $a > 0$ und $b > 0$ gilt. Die Produktionskosten für Firma i, $i = 1, 2$, betragen

$$k_i\,(x_i) = \frac{c_i}{2} x_i^2.$$

Der Gewinn G_i, der durch die Produktion und den Verkauf von x_i Einheiten erzielt wird, hängt somit von x_1 und x_2 wie folgt ab:

$$G_1\,(x_1, x_2) = p x_1 - k_1\,(x_1)\,,$$

$$G_2\,(x_1, x_2) = p x_2 - k_2\,(x_2)\,.$$

   (a) (*Cournot* Lösung) Berechnen Sie die Menge x_i, die den Gewinn von Firma i maximiert, wenn die Produktionsmenge x_j, $j \neq i$, der Konkurrenzfirma als gegeben angenommen wird. Diese Lösung $x_i = R_i\,(x_j)$ wird als *Reaktionskurve* bezeichnet. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Reaktionskurven (*Cournot Punkt*).

   (b) (*Pareto* Lösung) Bestimmen Sie jene Produktionsmengen, die den gemeinsamen Gewinn $G_1\,(x_1, x_2) + G_2\,(x_1, x_2)$ maximieren.

14. (Fortsetzung von Bsp. 13, *Stackelberg* Lösung) Nehmen Sie an, daß Firma 2 die Reaktionskurve ihres Konkurrenten nicht kennt. Umgekehrt soll Firma 1 die Kurve $R_2\,(x_1)$ kennen. Das Gewinnmaximierungsproblem für Firma 1 lautet dann

$$\max G_1\,(x_1, R_2\,(x_1))\,.$$

Bestimmen Sie die Lösung x_1^s dieses Problems sowie die zugehörige Reaktion $x_2^s = R_2\,(x_1^s)$.

15. Verwenden Sie das Gradientenverfahren, um das NLOP

$$\max z = -(x_1 - 3)^2 - (x_2 - 2)^2 = f\,(x_1, x_2)$$

unter

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

zu lösen.

16. Lösen Sie mit Hilfe der Lagrange Methode:

$$\max (\min) f(x, y) = x^2 + y^2$$

unter

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 3.$$

17. Lösen Sie mit Hilfe der Lagrange Methode:

$$\max (\min) x^2 + y^2 + z^2$$

unter

$$x + 2y + z = 1 \text{ und } 2x - y - 3z = 4.$$

18. Lösen Sie mit Hilfe der Lagrange Methode:

$$\max f(x, y) = 2x + 3y$$

unter

$$g(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5.$$

19. Versuchen Sie, folgendes Problem mit Hilfe der Lagrange Methode zu lösen:

$$\max \ln (x_1 x_2 x_3)$$

unter

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \text{ und } 0.5 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) = 1.5.$$

Begründen Sie, warum die Multiplikatoren nicht eindeutig bestimmt sind.

20. Gegeben sei das Minimierungsproblem

$$\min f(x,y) = x + 2y$$

$$g(x,y) = p\left(x^2 + y^2\right) + x^2y^2 - 4 = 0.$$

   (a) Zeigen Sie, daß jede Lösung des obigen Problems die Gleichungen

   $$2px + 2xy^2 = py + x^2y, px^2 + py^2 + x^2y^2 = 4$$

   erfüllt.

   (b) Bestimmen Sie die Lösung des Problems im Falle $p = 0$ und der zusätzlichen Beschränkungen $x \geq 0$, $y \geq 0$.

21. Gegeben sei das Maximierungsproblem

$$\max f(x,y) = xy$$

$$g(x,y) = px + qy = R,$$

wobei p, q und R positive Konstanten sind.

   (a) Bestimmen Sie die Lösung mit der Lagrange Methode.

   (b) Bestimmen Sie die Lösung, indem Sie das Problem auf ein eindimensionales Maximierungsproblem zurückführen.

   (c) Verifizieren Sie die Formel $\frac{\partial f(x^*(R),y^*(R))}{\partial R} = \lambda$, wobei $(x^*(R), y^*(R))$ die optimale Lösung in Abhängigkeit des Parameters R ist.

22. Gegeben sei das Maximierungsproblem

$$\max f(x,y) = xy + \sin(x)$$

$$g(x,y) = \frac{x}{\pi} + y = R.$$

   (a) Bestimmen Sie mit der Lagrange Methode die optimale Lösung für den Fall $R = 1$.

   (b) Verifizieren Sie die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung.

   (c) Wie ändert sich der optimale Wert $f(x^*, y^*)$ bei infinitesimaler Änderung von R?

23. Gegeben sei das Nutzenmaximierungsproblem

$$\max U(x,y) = \frac{1}{2}\log(1+x) + \frac{1}{4}\log(1+y)$$

$$G(x,y) = 2x + 3y = R.$$

(a) Berechnen Sie die optimale Lösung $(x^*(R), y^*(R))$ sowie den zugehörigen Lagrangemultiplikator $\lambda(R)$.

(b) Verifizieren Sie die Formel $\frac{\partial U(x^*(R),y^*(R))}{\partial R} = \lambda(R)$.

24. Eine Firma möchte ihr jährliches Werbebudget K möglichst günstig auf ihre zwei Produkte aufteilen. Der erste Artikel ist ein Saisonartikel, der gemäß der Nachfragefunktion $N1 = x\sin^2(\pi t)$ nachgefragt wird. Hierbei bezeichnet x die Werbeintensität für das erste Produkt und t die Zeit. Die Nachfrage nach dem zweiten Artikel unterliegt keinen saisonalen Schwankungen und hängt von der Werbeintensität y für dieses Produkt in der Form $N2 = 2y$ ab. Die Verkaufspreise der beiden Artikel seien konstant und durch $p1 = \frac{3}{2}$ sowie $p2 = \frac{1}{2}$ gegeben. Somit beträgt der Jahresumsatz

$$S(x,y) = \int_0^4 \frac{3x}{2}\sin^2(\pi t)dt + \int_0^4 y dt.$$

(a) Zeigen Sie, daß $S(x,y) = 3x + 4y$ gilt.

(b) Die Kosten für z Werbungseinheiten betragen $\sqrt{z}$ Geldeinheiten. Zeigen Sie, daß die Firma das Problem

$$\max S(x,y)$$

$$g(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = K, x \geq 0, y \geq 0$$

zu lösen hat. Wie lautet die optimale Lösung? (Hinweis: Skizze)