Nichtlineare Optimierung UE WS 2013/2014

25. Gegeben sei das nichtlineare Programmierungsproblem

$$\min x_1^4 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$$

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & \geq & 10 \\ x_1 & + & 2x_2 & \geq & 10 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Wie lauten die Kuhn-Tucker-Bedingungen für dieses Problem? Benützen Sie die Bedingungen zur Klärung, ob $(x_1, x_2) = (0, 10)$ optimal sein kann.

26. Suchen Sie mit Hilfe der Kuhn-Tucker-Bedingungen x_1 und x_2, welche

$$f(x_1, x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2 + 5)$$

unter

$$4 - x_1 - x_2 \geq 0,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

maximieren.

27. Einer Firma stehen wöchentlich insgesamt 160 Arbeitsstunden zum Preis von 15\$/h zur Verfügung. Zusätzliche Arbeit kann zum Preis von 25\$/h gekauft werden. Kapital kann in uneingeschränkten Mengen zum Preis von 5\$/Kapitaleinheit gekauft werden. Wenn K Einheiten Kapital und L Einheiten Arbeit wöchentlich zur Verfügung stehen, können $L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{3}}$ Maschinen produziert werden. Der Verkaufspreis einer Maschine beträgt 270\$. Berechnen Sie das wöchentliche Gewinnmaximum der Firma.

28. Lösen Sie folgendes NLOP:

$$\min -x^2$$

$$-1 \leq x \leq 2.$$

29. Lösen Sie folgendes NLOP:

$$\min f(x) = x_1$$

$$\begin{array}{rcl} g_1(x) & = & 16 - (x_1 - 4)^2 - (x_2)^2 \geq 0 \\ h_1(x) & = & (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 - 13 = 0. \end{array}$$

30. Lösen Sie das folgende NLOP mit Hilfe des Kuhn-Tucker Satzes:

$$\min f(x, y) = x^2 + xy + y^2$$

$$\begin{array}{rcrcl} g_1(x, y) & = & x - 2y & \leq & -1 \\ g_2(x, y) & = & 2x + y & \leq & 2 \end{array}$$

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

31. Lösen Sie das folgende NLOP mit Hilfe des Kuhn-Tucker Satzes:

$$\max f(x, y) = y$$

$$\begin{array}{rcrcl} g_1(x, y) & = & x^2 + y^2 - 4 & \leq & 0 \\ g_2(x, y) & = & -x^2 + y & \leq & 0. \end{array}$$

32. Eine Firma produziert zwei Güter, zu deren Herstellung der selbe Rohstoff benötigt wird. Die wöchentlich verfügbare Menge des Rohstoffes beträgt 1000 Einheiten. Die Herstellung einer Einheit des Gutes 1 erfordert zwei Einheiten des Rohstoffes, hingegen werden zur Herstellung einer Einheit des zweiten Gutes 3 Rohstoffeinheiten benötigt. Die Kosten für y Einheiten des Rohstoffes betragen $y(1.2 + 0.0002y)$ Geldeinheiten. Die Marktpreise der beiden Produkte seien durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$p_1 = 5 - 0.001x_1 - 0.0004x_2, p_2 = 8 - 0.0006x_1 - 0.002x_2,$$

wobei x_1 und x_2 die wöchentlichen Produktionsmengen der beiden Güter bezeichnen. Nehmen Sie an, daß außer den oben erwähnten Rohstoffkosten keine Produktionskosten entstehen und daß die Firma ihren Gewinn maximieren will. Formulieren und lösen Sie das entsprechende NLOP.

33. *(Cusp)* Lösen Sie folgendes NLOP:

$$\max x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} 1 + (x_1)^{0.1} - x_2 &\geq 0 \\ -1.9(x_1)^3 + 5.7(x_1)^2 - 5.8x_1 + x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

34. Bestimmen Sie jenen Punkt der Ellipse $E = \{(x,y)\,|3x^2 + 2xy + 3y^2 \leq 8\}$, der am weitesten vom Ursprung $(0,0)$ entfernt ist.

35. Gegeben sei das NLOP

$$\max xy$$

$$\begin{array}{rcrcr} x^2 & + & 2y^2 & \leq & 8 \\ -0.5x & + & y & \leq & -2 \end{array}$$

$$y \leq 0.$$

   (a) Fertigen Sie eine Skizze an und bestimmen Sie die Lösung (Hinweis: dies geht ohne Rechnung. Überlegen Sie sich, welche Werte die Zielfunktion xy im zulässigen Bereich annimmt.).

   (b) Bestimmen Sie alle Kandidaten für optimale Lösungen aus den notwendigen Optimalitätsbedingungen des Kuhn-Tucker Satzes.

   (c) Sind hinreichende Optimalitätsbedingungen erfüllt?

36. Lösen Sie folgendes NLOP:

$$\max Z = -(2x_1 - 5)^2 - (2x_2 - 1)^2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$