Nichtlineare Optimierung UE **WS 2014/2015**

1. Ein Hersteller von Computern produziert sowohl Personal-Computer (PC) als auch Workstations (WS). Eine Marktstudie, die die zentralen Erfolgsfaktoren für den Verkaufserfolg der Computer untersuchen sollte, hat ergeben, daß der Preis die entscheidende Rolle spielt. Eine daraufhin durchgeführte Sensitivitätsanalyse hat folgende Abhängigkeit zwischen Preis p (in GE) und Absatzmenge x ergeben:

$$\begin{array}{rcrcrl} 2x_1 & + & 8p_1 & = & 240 & \quad \text{(PC)} \\ 3x_2 & + & 18p_2 & = & 1800 & \quad \text{(WS)} \end{array}$$

   Die variablen Kosten setzen sich im wesentlichen zusammen aus Personalkosten für die Bedienung der Maschinen und für die Montage sowie Materialkosten. Die Kostensätze betragen bei der Maschinenbedienung $0,7$ GE/Stunde und bei der Montage $0,3$ GE/Stunde. Die einzelnen Produkte belasten die Fertigung unterschiedlich (jeweils auf ein Stück bezogen):

	PC	WS
Montage [h]	3	4
Maschinenbedienung [h]	1	2
Materialkosten [GE]	8,4	17,4

   Für die Maschinenbedienung steht eine Kapazität von 450 Stunden zur Verfügung. Die Kapazität soll voll ausgeschöpft werden. Montagekapazität ist kein Engpaßfaktor.

   Formulieren Sie das zugehörige NLOP.

2. Stellen Sie die folgenden Funktionen $f : M \to \mathbb{R}$ graphisch dar und geben Sie die lokalen und globalen Extrempunkte an.

   (a) $f(x) = 1 - x^2$, $M = [-1, 1]$

   (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $M = (0, \infty)$

   (c) $f(x) = \left\{ \begin{array}{c} -1 - x \\ 1 \end{array} \right\}$ falls $\left\{ \begin{array}{c} -1 \leq x < 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$, $M = [-1, 1]$

3. Die Produktionsmenge x einer Firma hängt vom eingesetzten Kapital k folgendermaßen ab:

$$x = f(k) = (k-1)^{\frac{1}{3}} + 1, k \geq 0.$$

   (a) Bestimmen Sie den *Grenzertrag* ($= f'(k)$).

   (b) Untersuchen Sie, auf welchen Intervallen f steigend, fallend, konvex, konkav ist.

   (c) Der Firma entstehen pro Kapitaleinheit $c > 0$ Geldeinheiten an Kosten. Der Erlös durch den Verkauf einer Einheit des Produktes beträgt $p > 0$ Geldeinheiten. Somit lautet der Gewinn der Firma

   $$G(k) = pf(k) - ck.$$

   Bestimmen Sie den optimalen Kapitalstock (= jenen Wert $k \geq 0$, bei dem der Gewinn maximiert wird).

4. *(Autofahrt)* Angenommen, Sie wollen von Wien nach Hamburg fahren (etwa 1000 km Autobahn) und leihen daher einen PKW zu einer Leihgebühr von 18 GE pro Stunde. Die Benzinkosten betragen 9 GE pro Liter. Die durchschnittliche Reisegeschwindigkeit x kann von Ihnen im Bereich 50 km/h $\leq x \leq$ 130 km/h gewählt werden. In diesem Geschwindigkeitsbereich gilt für die Strecke z (in km), die Sie mit einem Liter Benzin zurücklegen können, ungefähr

$$z = 14 - \frac{x}{50}.$$

Welche Durchschnittsgeschwindigkeit müssen Sie einhalten, um möglichst kostengünstig zu fahren?

5. (a) Bestimmen Sie mit dem Newtonverfahren das Minimum der Funktion

   $$x\,(\ln(x+1) - 1)$$

   auf dem Intervall $[0, 2]$ (Genauigkeit $\epsilon = 10^{-2}$).

   (b) Ist das Newtonverfahren mit Startwert $x_0 = -1$ zur Minimierung von

   $$-\frac{1}{5}x^5 + 2x^3 + 11x$$

   geeignet?

6. Führen Sie fünf Schritte des Verfahrens nach dem goldenen Schnitt zur Maximierung von
$$-x^2 - 1$$
auf dem Intervall $[-1, 0.75]$ durch.

7. Seien S eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ sowie $f : S \to \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene Funktionen. Unter der Voraussetzung, daß F eine strikt wachsende Funktion ist, beweisen Sie, daß der Punkt x^* genau dann ein Minimalpunkt von f ist, wenn er ein Minimalpunkt der Funktion $g : S \to \mathbb{R}$ ist, wobei g durch
$$g(x) = F(f(x)), x \in S$$
definiert ist. Verwenden Sie dieses Resultat, um das Minimum der Funktion $e^{x^2-2xy+2y^2-2y+1}$ auf $\mathbb{R}^2$ zu bestimmen.

8. Ein Monopolist produziert ein Produkt und hat zwei Kunden. Wenn q_1 Einheiten für den ersten Kunden produziert werden, so ist der Kunde 1 bereit, einen Preis $70 - 4q_1$ \$ zu zahlen. Wenn q_2 Einheiten für den zweiten Kunden produziert werden, so ist der Kunde 2 bereit, einen Preis $150 - 15q_2$ \$ zu zahlen. Für $q > 0$ sind die Kosten, q Einheiten zu erzeugen, $100 + 15q$ \$. Wieviel soll der Monopolist jedem Kunden verkaufen, um den Profit zu maximieren?

9. *(Produktion)* Sei $Y = F(K, L)$ eine stetig differenzierbare Produktionsfunktion (Y = Produktionsmenge, K = Kapital, L = Arbeitskraft). Weiters seien p der Produktpreis, r die Kapitalkosten (Zinsrate) und w die Lohnkosten. Der Gewinn, der durch Produktion und Verkauf von $F(K, L)$ Einheiten erzielt wird, beträgt
$$G(K, L) = pF(K, L) - rK - wL, K \geq 0, L \geq 0.$$
   (a) Geben Sie die notwendigen Bedingungen für ein Profitmaximum mit $K > 0$ und $L > 0$ an.
   (b) Geben Sie die Lösung der notwendigen Bedingungen für den Fall einer Cobb-Douglas Produktionsfunktion
   $$F(K, L) = cK^\alpha L^\beta$$
   an, wobei die Parameter die Bedingungen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und $\alpha + \beta \neq 1$ erfüllen.

10. Sei $f(x, y)$ eine auf $S \subseteq \mathbb{R}^n$ definierte differenzierbare Funktion. Um die globalen Extrema von f zu finden, kann man wie folgt vorgehen: Man bestimmt (1) alle stationären Punkte von f auf S und (2) alle Extrempunkte von f am Rand von S (dieser Schritt kann auf die Lösung eindimensionaler min/max Probleme zurückgeführt werden). Schließlich wertet man f an allen in (1) und (2) gefundenen Punkten aus und bestimmt den maximalen bzw. minimalen Wert. Bestimmen Sie mit dieser Methode die globalen Extrema von

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 9$$

auf

$$S = \{(x, y) \,|0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}.$$

11. Wie Beispiel 10 für

$$f(x, y) = 3 + x^3 - x^2 - y^2, S = \left\{(x, y) \,|x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\right\}.$$