# Nichtlineare Optimierung UE WS 2015/2016

32. Gegeben sei das folgende quadratische Programmierungsproblem

$$\max f(x) = 8x_1 - {x_1}^2 + 4x_2 - {x_2}^2$$

unter

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

und

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

(a) Verwenden Sie die KKT-Bedingungen zur Ableitung einer optimalen Lösung.

(b) Es wird unterstellt, daß dieses Problem mit dem modifizierten Simplexverfahren zu lösen ist. Formulieren Sie das lineare Programmierungsproblem, das explizit zu bearbeiten ist, und stellen Sie dann die zusätzliche Komplementaritätsrestriktion auf, die automatisch von dem Algorithmus eingehalten wird.

(c) Wenden Sie das modifizierte Simplexverfahren auf das unter Teilaufgabe (b) formulierte Problem an.

33. Gegeben sei das folgende quadratische Programmierungsproblem

$$\max f(x) = 20x_1 - 20{x_1}^2 + 50x_2 - 5{x_2}^2 + 20x_1x_2$$

unter

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & + & 4x_2 & \leq & 18 \end{array}$$

und

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Nehmen Sie an, daß das Problem mit dem modifizierten Simplexverfahren zu lösen ist.

(a) Formulieren Sie das lineare Programmierungsproblem, das explizit zu bearbeiten ist, und stellen Sie dann die zusätzliche Komplementaritätsrestriktion auf, die automatisch von dem Algorithmus eingehalten wird.

(b) Wenden Sie das modifizierte Simplexverfahren auf das unter Teilaufgabe (a) formulierte Problem an.

34. Gegeben sei das folgende konvexe Optimierungsproblem

$$\max f(x) = 4x_1 + 6x_2 - {x_1}^3 - 2{x_2}^2$$

unter

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & \leq & 8 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leq & 14 \end{array}$$

und

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

(a) Beweisen Sie, daß $(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2}\right)$ eine optimale Lösung ist, indem Sie die KKT-Bedingungen zu Hilfe nehmen.

(b) Behandeln Sie dieses Problem als eines der Programmierung bei zerlegbaren Funktionen. Formulieren Sie hierzu ein mathematisches Näherungsmodell, das mit dem Simplexverfahren gelöst werden könnte. Benutzen Sie die ganzzahligen Werte als Knickstellen der stückweise linearen Funktionen.

35. Gegeben sei das folgende konvexe Optimierungsproblem mit linearen Nebenbedingungen

$$\max f(x) = 32x_1 + 50x_2 - 10{x_2}^2 + {x_2}^3 - {x_1}^4 - {x_2}^4$$

unter

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & x_2 & \leq & 11 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 16 \end{array}$$

und

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

(a) Behandeln Sie dieses Problem als eines der Programmierung bei zerlegbaren Funktionen. Formulieren Sie hierzu ein mathematisches Näherungsmodell, das mit dem Simplexverfahren gelöst werden könnte. Verwenden Sie $x_1 = 0, 1, 2, 3$ und $x_2 = 0, 1, 2, 3$ als Knickstellen der stückweise linearen Funktionen.

(b) Ziehen Sie die KKT-Bedingungen heran um festzustellen, ob $(x_1, x_2) = (2, 2)$ optimal für das ursprüngliche Problem (nicht für das Näherungsmodell) sein kann.

36. Die Firma *Oilco* möchte bestimmen, wieviel Barrel Öl sie in den beiden kommenden Jahren fördern soll. Wenn *Oilco* im ersten Jahr $x_1$ Millionen Barrel fördert, kann jedes Barrel für $30 - x_1$ \$ verkauft werden. Wenn *Oilco* im zweiten Jahr $x_2$ Millionen Barrel fördert, kann jedes Barrel für $35 - x_2$ \$ verkauft werden. Die Kosten, im ersten Jahr $x_1$ Millionen Barrel zu fördern, betragen ${x_1}^2$ Millionen \$; die Kosten, im zweiten Jahr $x_2$ Millionen Barrel zu fördern, betragen $2{x_2}^2$ Millionen \$. Insgesamt stehen 20 Millionen Barrel Öl zur Verfügung, und höchstens 250 Millionen \$ können zur Förderung ausgegeben werden.

Formulieren Sie das entsprechende nichtlineare Programmierungsproblem. Lösen Sie anschließend dieses Problem mit dem Verfahren bei zerlegbaren Funktionen.

37. Lösen Sie das Optimierungsproblem

$$\max_{x_1,x_2} 12x_1 - {x_1}^2 + 4x_2 - {x_2}^2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcrcl} 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 20 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 9 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

mit der Methode der zulässigen Richtungen. Starten Sie im Punkt $(0, 0)$.

38. Lösen Sie das folgende NLOP mittels Verfahren der zulässigen Richtungen.

$$\min_{x_1,x_2} - \ln\left[(x_1+1)\,(x_2+1)^2\right]$$

unter

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

sowie

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Als Startbedingung ist der Punkt $(1, 1)$ zu wählen.

39. Lösen Sie das folgende NLOP mittels Verfahren der zulässigen Richtungen.

$$\min_{x_1,x_2} 10(x_1 - 3.5)^2 + 20(x_2 - 4)^2$$

unter

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ -2x_1 & - & x_2 & \leq & -6 \\ -\frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & \leq & 4. \end{array}$$

Als Startbedingung ist der Punkt $\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$ zu wählen.

40. Gegeben sei das folgende konvexe Programmierungsproblem mit linearer Nebenbedingung:

$$\max_{x_1,x_2} 4x_1 - x_1^4 + 2x_2 - x_2^2$$

unter

$$4x_1 + 2x_2 \leq 5$$

sowie

$$x_1 \geq 0\,,\ x_2 \geq 0\,.$$

(a) Führen Sie vier Iterationen des Frank-Wolfe-Algorithmus durch. Legen Sie hierbei die erste Probierlösung $(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ zugrunde.

(b) Zeigen Sie graphisch, wie die Folge der unter Teilaufgabe (a) erhaltenen Probierlösungen extrapoliert werden kann, um eine bessere Näherung für eine optimale Lösung zu erhalten. Wie lautet die sich ergebende Schätzung für diese Lösung?

(c) Benützen Sie die KKT-Bedingungen, um zu überprüfen, ob die Lösung, welche man in Teilaufgabe (b) erhalten hat, tatsächlich optimal ist. Wenn dies nicht der Fall ist, verwenden Sie diese Bedingungen zur Herleitung der exakten optimalen Lösung.