

9. (*Produktion*) Sei  $Y = F(K, L)$  eine stetig differenzierbare Produktionsfunktion ( $Y =$  Produktionsmenge,  $K =$  Kapital,  $L =$  Arbeitskraft). Weiters seien  $p$  der Produktpreis,  $r$  die Kapitalkosten (Zinsrate) und  $w$  die Lohnkosten. Der Gewinn, der durch Produktion und Verkauf von  $F(K, L)$  Einheiten erzielt wird, beträgt

$$G(K, L) = pF(K, L) - rK - wL, K \geq 0, L \geq 0.$$

- (a) Geben Sie die notwendigen Bedingungen für ein Profitmaximum mit  $K > 0$  und  $L > 0$  an.
- (b) Geben Sie die Lösung der notwendigen Bedingungen für den Fall einer Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$$F(K, L) = cK^\alpha L^\beta$$

an, wobei die Parameter die Bedingungen  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  und  $\alpha + \beta \neq 1$  erfüllen.

10. Sei  $f(x, y)$  eine auf  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  definierte differenzierbare Funktion. Um die globalen Extrema von  $f$  zu finden, kann man wie folgt vorgehen: Man bestimmt (1) alle stationären Punkte von  $f$  auf  $S$  und (2) alle Extrempunkte von  $f$  am Rand von  $S$  (dieser Schritt kann auf die Lösung eindimensionaler min/max Probleme zurückgeführt werden). Schließlich wertet man  $f$  an allen in (1) und (2) gefundenen Punkten aus und bestimmt den maximalen bzw. minimalen Wert. Bestimmen Sie mit dieser Methode die globalen Extrema von

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 9$$

auf

$$S = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}.$$

11. Wie Beispiel 10 für

$$f(x, y) = 3 + x^3 - x^2 - y^2, S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}.$$

12. (*Angebotsduopol*) Zwei Firmen bieten ein und dasselbe Produkt in den Mengen  $x_1$  bzw.  $x_2$  an. Der Preis  $p$  ergibt sich gemäß der Nachfragefunktion

$$p = b - a(x_1 + x_2),$$

wobei  $a > 0$  und  $b > 0$  gilt. Die Produktionskosten für Firma  $i$ ,  $i = 1, 2$ , betragen

$$k_i(x_i) = \frac{c_i}{2}x_i^2.$$

Der Gewinn  $G_i$ , der durch die Produktion und den Verkauf von  $x_i$  Einheiten erzielt wird, hängt somit von  $x_1$  und  $x_2$  wie folgt ab:

$$G_1(x_1, x_2) = px_1 - k_1(x_1),$$

$$G_2(x_1, x_2) = px_2 - k_2(x_2).$$

- (a) (*Cournot Lösung*) Berechnen Sie die Menge  $x_i$ , die den Gewinn von Firma  $i$  maximiert, wenn die Produktionsmenge  $x_j$ ,  $j \neq i$ , der Konkurrenzfirma als gegeben angenommen wird. Diese Lösung  $x_i = R_i(x_j)$  wird als *Reaktionskurve* bezeichnet. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Reaktionskurven (*Cournot Punkt*).
- (b) (*Pareto Lösung*) Bestimmen Sie jene Produktionsmengen, die den gemeinsamen Gewinn  $G_1(x_1, x_2) + G_2(x_1, x_2)$  maximieren.
13. (Fortsetzung von Bsp. 12, *Stackelberg Lösung*) Nehmen Sie an, daß Firma 2 die Reaktionskurve ihres Konkurrenten nicht kennt. Umgekehrt soll Firma 1 die Kurve  $R_2(x_1)$  kennen. Das Gewinnmaximierungsproblem für Firma 1 lautet dann

$$\max G_1(x_1, R_2(x_1)).$$

Bestimmen Sie die Lösung  $x_1^s$  dieses Problems sowie die zugehörige Reaktion  $x_2^s = R_2(x_1^s)$ .

14. Verwenden Sie das Gradientenverfahren, um das NLOP

$$\max z = -(x_1 - 3)^2 - (x_2 - 2)^2 = f(x_1, x_2)$$

unter

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

zu lösen.

15. Führen Sie fuer das NLOP

$$\min f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$$

drei Schritte des Gradientenverfahrens mit dem Startwert  $x^{(0)} = (1, 1)$  durch, und stellen Sie den Iterationsverlauf grafisch dar.

16. Lösen Sie mit Hilfe der Lagrange Methode:

$$\max (\min) f(x, y) = x^2 + y^2$$

unter

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 3.$$

17. Lösen Sie mit Hilfe der Lagrange Methode:

$$\max (\min) x^2 + y^2 + z^2$$

unter

$$x + 2y + z = 1 \text{ und } 2x - y - 3z = 4.$$

18. Versuchen Sie, folgendes Problem mit Hilfe der Lagrange Methode zu lösen:

$$\max \ln(x_1 x_2 x_3)$$

unter

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \text{ und } 0.5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 1.5.$$

Begründen Sie, warum die Multiplikatoren nicht eindeutig bestimmt sind.

19. Gegeben sei das Maximierungsproblem

$$\max f(x, y) = xy$$

$$g(x, y) = px + qy = R,$$

wobei  $p$ ,  $q$  und  $R$  positive Konstanten sind.

- (a) Bestimmen Sie die Lösung mit der Lagrange Methode.
- (b) Bestimmen Sie die Lösung, indem Sie das Problem auf ein eindimensionales Maximierungsproblem zurückführen.
- (c) Verifizieren Sie die Formel  $\frac{\partial f(x^*(R), y^*(R))}{\partial R} = \lambda$ , wobei  $(x^*(R), y^*(R))$  die optimale Lösung in Abhängigkeit des Parameters  $R$  ist.

20. Gegeben sei das Maximierungsproblem

$$\max f(x, y) = xy + \sin(x)$$

$$g(x, y) = \frac{x}{\pi} + y = R.$$

- (a) Bestimmen Sie mit der Lagrange Methode die optimale Lösung für den Fall  $R = 1$ .
- (b) Verifizieren Sie die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung.
- (c) Wie ändert sich der optimale Wert  $f(x^*, y^*)$  bei infinitesimaler Änderung von  $R$ ?

21. Eine Firma möchte ihr jährliches Werbebudget  $K$  möglichst günstig auf ihre zwei Produkte aufteilen. Der erste Artikel ist ein Saisonartikel, der gemäß der Nachfragefunktion  $N1 = x \sin^2(\pi t)$  nachgefragt wird. Hierbei bezeichnet  $x$  die Werbeintensität für das erste Produkt und  $t$  die Zeit. Die Nachfrage nach dem zweiten Artikel unterliegt keinen saisonalen Schwankungen und hängt von der Werbeintensität  $y$  für dieses Produkt in der Form  $N2 = 2y$  ab. Die Verkaufspreise der beiden Artikel seien konstant und durch  $p1 = \frac{3}{2}$  sowie  $p2 = \frac{1}{2}$  gegeben. Somit beträgt der Jahresumsatz

$$S(x, y) = \int_0^4 \frac{3x}{2} \sin^2(\pi t) dt + \int_0^4 y dt.$$

- (a) Zeigen Sie, daß  $S(x, y) = 3x + 4y$  gilt.
- (b) Die Kosten für  $z$  Werbungseinheiten betragen  $\sqrt{z}$  Geldeinheiten. Wie lautet die optimale Lösung des daraus resultierenden Problems der Firma

$$\begin{aligned} & \max S(x, y) \\ & g(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = K, x \geq 0, y \geq 0 \quad ? \end{aligned}$$

**Hinweis:** Skizze!