9. *(Produktion)* Sei $Y = F(K,L)$ eine stetig differenzierbare Produktionsfunktion (Y = Produktionsmenge, K = Kapital, L = Arbeitskraft). Weiters seien p der Produktpreis, r die Kapitalkosten (Zinsrate) und w die Lohnkosten. Der Gewinn, der durch Produktion und Verkauf von $F(K,L)$ Einheiten erzielt wird, beträgt

$$G(K,L) = pF(K,L) - rK - wL, K \geq 0, L \geq 0.$$

   (a) Geben Sie die notwendigen Bedingungen für ein Profitmaximum mit $K > 0$ und $L > 0$ an.

   (b) Geben Sie die Lösung der notwendigen Bedingungen für den Fall einer Cobb-Douglas Produktionsfunktion

$$F(K,L) = cK^{\alpha}L^{\beta}$$

   an, wobei die Parameter die Bedingungen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ und $\alpha + \beta \neq 1$ erfüllen.

10. Sei $f(x,y)$ eine auf $S \subseteq \mathbb{R}^n$ definierte differenzierbare Funktion. Um die globalen Extrema von f zu finden, kann man wie folgt vorgehen: Man bestimmt (1) alle stationären Punkte von f auf S und (2) alle Extrempunkte von f am Rand von S (dieser Schritt kann auf die Lösung eindimensionaler min/max Probleme zurückgeführt werden). Schließlich wertet man f an allen in (1) und (2) gefundenen Punkten aus und bestimmt den maximalen bzw. minimalen Wert. Bestimmen Sie mit dieser Methode die globalen Extrema von

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 9$$

auf

$$S = \{(x,y) \,|0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4\}.$$

11. Wie Beispiel 10 für

$$f(x,y) = 3 + x^3 - x^2 - y^2, S = \left\{(x,y) \,|x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\right\}.$$

12. *(Angebotsduopol)* Zwei Firmen bieten ein und dasselbe Produkt in den Mengen x_1 bzw. x_2 an. Der Preis p ergibt sich gemäß der Nachfragefunktion
$$p = b - a\,(x_1 + x_2)\,,$$
wobei $a > 0$ und $b > 0$ gilt. Die Produktionskosten für Firma i, $i = 1, 2$, betragen
$$k_i\,(x_i) = \frac{c_i}{2} x_i^2.$$
Der Gewinn G_i, der durch die Produktion und den Verkauf von x_i Einheiten erzielt wird, hängt somit von x_1 und x_2 wie folgt ab:
$$G_1\,(x_1, x_2) = p x_1 - k_1\,(x_1)\,,$$
$$G_2\,(x_1, x_2) = p x_2 - k_2\,(x_2)\,.$$
   (a) (*Cournot* Lösung) Berechnen Sie die Menge x_i, die den Gewinn von Firma i maximiert, wenn die Produktionsmenge x_j, $j \neq i$, der Konkurrenzfirma als gegeben angenommen wird. Diese Lösung $x_i = R_i\,(x_j)$ wird als *Reaktionskurve* bezeichnet. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der beiden Reaktionskurven (*Cournot Punkt*).
   (b) (*Pareto* Lösung) Bestimmen Sie jene Produktionsmengen, die den gemeinsamen Gewinn $G_1\,(x_1, x_2) + G_2\,(x_1, x_2)$ maximieren.

13. (Fortsetzung von Bsp. 12, *Stackelberg* Lösung) Nehmen Sie an, daß Firma 2 die Reaktionskurve ihres Konkurrenten nicht kennt. Umgekehrt soll Firma 1 die Kurve $R_2\,(x_1)$ kennen. Das Gewinnmaximierungsproblem für Firma 1 lautet dann
$$\max G_1\,(x_1, R_2\,(x_1))\,.$$
Bestimmen Sie die Lösung x_1^s dieses Problems sowie die zugehörige Reaktion $x_2^s = R_2\,(x_1^s)$.

14. Verwenden Sie das Gradientenverfahren, um das NLOP

$$\max z = -(x_1 - 3)^2 - (x_2 - 2)^2 = f(x_1, x_2)$$

unter

$$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

zu lösen.

15. Führen Sie fuer das NLOP

$$\min f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2$$

drei Schritte des Gradientenverfahrens mit dem Startwert $x^{(0)} = (1, 1)$ durch, und stellen Sie den Iterationsverlauf grafisch dar.

16. Lösen Sie mit Hilfe der Lagrange Methode:

$$\max (\min) f(x, y) = x^2 + y^2$$

unter

$$g(x, y) = x^2 + xy + y^2 = 3.$$

17. Lösen Sie mit Hilfe der Lagrange Methode:

$$\max (\min) x^2 + y^2 + z^2$$

unter

$$x + 2y + z = 1 \text{ und } 2x - y - 3z = 4.$$

18. Versuchen Sie, folgendes Problem mit Hilfe der Lagrange Methode zu lösen:

$$\max \ln (x_1 x_2 x_3)$$

unter

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \text{ und } 0.5\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) = 1.5.$$

Begründen Sie, warum die Multiplikatoren nicht eindeutig bestimmt sind.

19. Gegeben sei das Maximierungsproblem

$$\max f(x, y) = xy$$

$$g(x, y) = px + qy = R,$$

wobei p, q und R positive Konstanten sind.

(a) Bestimmen Sie die Lösung mit der Lagrange Methode.

(b) Bestimmen Sie die Lösung, indem Sie das Problem auf ein eindimensionales Maximierungsproblem zurückführen.

(c) Verifizieren Sie die Formel $\frac{\partial f(x^*(R), y^*(R))}{\partial R} = \lambda$, wobei $(x^*(R), y^*(R))$ die optimale Lösung in Abhängigkeit des Parameters R ist.

20. Gegeben sei das Maximierungsproblem

$$\max f(x, y) = xy + \sin(x)$$

$$g(x, y) = \frac{x}{\pi} + y = R.$$

(a) Bestimmen Sie mit der Lagrange Methode die optimale Lösung für den Fall $R = 1$.

(b) Verifizieren Sie die hinreichenden Bedingungen zweiter Ordnung.

(c) Wie ändert sich der optimale Wert $f(x^*, y^*)$ bei infinitesimaler Änderung von R?

21. Eine Firma möchte ihr jährliches Werbebudget K möglichst günstig auf ihre zwei Produkte aufteilen. Der erste Artikel ist ein Saisonartikel, der gemäß der Nachfragefunktion $N1 = x\sin^2(\pi t)$ nachgefragt wird. Hierbei bezeichnet x die Werbeintensität für das erste Produkt und t die Zeit. Die Nachfrage nach dem zweiten Artikel unterliegt keinen saisonalen Schwankungen und hängt von der Werbeintensität y für dieses Produkt in der Form $N2 = 2y$ ab. Die Verkaufspreise der beiden Artikel seien konstant und durch $p1 = \frac{3}{2}$ sowie $p2 = \frac{1}{2}$ gegeben. Somit beträgt der Jahresumsatz

$$S(x,y) = \int_0^4 \frac{3x}{2}\sin^2(\pi t)dt + \int_0^4 y dt.$$

(a) Zeigen Sie, daß $S(x,y) = 3x + 4y$ gilt.

(b) Die Kosten für z Werbungseinheiten betragen $\sqrt{z}$ Geldeinheiten. Wie lautet die optimale Lösung des daraus resultierenden Problems der Firma

$$\max S(x,y)$$

$$g(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} = K, x \geq 0, y \geq 0 \quad ?$$

Hinweis: Skizze!