28. In einer gegebenen Wirtschaft wird Kapital K gemäß der Vorschrift

$$\dot{K}(t) = sF(K(t), L(t)) - \delta K(t)$$

akkumuliert, wobei s die Sparquote beschreibt ($0 < s < 1$), δ den Abschreibungssatz bezeichnet ($\delta > 0$), und F die Produktionsfunktion ist. Sei $w > 0$ der Lohnsatz in einem großen benachbarten Land, wobei w als exogen angenommen wird. Die Arbeitskräfte L dieser Wirtschaft wachsen bzw. nehmen ab entsprechend der Differenz zwischen dem Grenzprodukt der Arbeit und w:

$$\dot{L}(t) = L(t)\left[F_L(K(t), L(t)) - w\right].$$

Wir nehmen an, dass

$$F(K(t), L(t)) = 4[K(t)L(t)]^{\frac{1}{4}}.$$

(a) Bestimmen Sie die Isokline $\dot{K} = 0$ im (L, K)-Raum. Identifizieren Sie die Bereiche, wo $\dot{K} > 0$ bzw. $\dot{K} < 0$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Isokline $\dot{L} = 0$ und die Bereiche, wo $\dot{L} > 0$ bzw. $\dot{L} < 0$ gilt.

(c) Gibt es ein Gleichgewicht (L^*, K^*) mit $K^* > 0$ und $L^* > 0$? Ist es stabil?

(d) Nehmen Sie an, dass $w = 1$, $s = 0.1$, $\delta = 0.4$, und bestimmen Sie K^* und L^*. Bestimmen Sie die Eigenwerte der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht, und beschreiben Sie das Systemverhalten in der Nähe des Gleichgewichtes.

29. Bezeichne $K(t)$ den Kapitalstock zum Zeitpunkt t und $P(t)$ den Umweltverschmutzungsgrad. Der Output ist durch

$$Y(t) = \frac{(K(t))^\alpha}{1 + P(t)}$$

gegeben, wobei $0 < \alpha < 1$. Das Sparkapital ist ein konstanter Anteil des Outputs, sodass die Änderungsrate des Kapitalstocks durch

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

bestimmt wird, wobei δ den Abschreibungssatz beschreibt und s die Sparquote darstellt ($0 < s < 1$). Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass

$$s = 2\delta.$$

Der Grad der Umweltverschmutzung ändert sich gemäß der Gleichung

$$\dot{P}(t) = K(t) - P(t).$$

(a) Bestimmen Sie die Isoklinen $\dot{P} = 0$ und $\dot{K} = 0$, und identifizieren Sie im (P, K)-Raum jene Bereiche, wo $\dot{P}$ und $\dot{K}$ eindeutige Vorzeichen haben.

(b) Zeigen Sie, dass ein Gleichgewicht (P^*, K^*) existiert. Bestimmen Sie diese Gleichgewichtswerte und zeigen Sie, dass $P^* > 0$ und $K^* > 0$ gilt.

(c) Stellen Sie fest, ob für $\delta = 0.4$, $s = 0.8$ und $\alpha = 0.1$ die Eigenwerte der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht reell oder komplex sind. Beschreiben Sie das lokale Systemverhalten dieses Gleichgewichtes.

30. Die Steigerungsrate des Preises von Äpfeln ist proportional zum Nachfrageüberschuss:

$$\dot{P}(t) = k\,(D(t) - S(t))\,.$$

Bestimmen Sie in den beiden folgenden Fällen den Gleichgewichtspreis. Was müssen Sie für das Vorzeichen von k annehmen, um zu garantieren, dass das Gleichgewicht stabil ist?

(a)

$$\begin{aligned} D(t) &= A - BP(t)\,, \quad A > 0\,, \quad B > 0\,, \\ S(t) &= -M + NP(t)\,, \quad M > 0\,, \quad N > 0\,. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} D(t) &= A - B\,[P(t) - 1]\,, \quad A > 0\,, \quad B > 0\,, \\ S(t) &= A + [P(t) - 1]^3\,. \end{aligned}$$

(*Hinweis:* Substituieren Sie $Q(t) = P(t) - 1$.)

31. Betrachten Sie das folgende optimale Kontrollmodell, welches eine zeitkontinuierliche Variante des Beispiels *"Konsumieren oder Investieren?"* aus der Vorlesung darstellt:

$$\max_{\{c(t)\}} \int_0^\infty e^{-\delta t} \ln\left(c(t)\right) dt$$

unter

$$\dot{s}(t) = rs(t) - c(t),$$

wobei die Zustandsvariable $s(t)$ bzw. die Kontrollvariable $c(t)$ den Kapitalstock bzw. den Konsum jeweils zum Zeitpunkt t beschreibt. Nehmen Sie an, dass die Diskontierung die Verzinsung übersteigt, d.h.

$$\delta > r \geq 0.$$

(a) Formulieren Sie die Hamilton-Funktion in Momentanwertschreibweise, wobei Sie die Kozustandsvariable mit λ bezeichnen.

(b) Leiten Sie mit Hilfe der notwendigen Optimalitätsbedingungen des Pontryagin'schen Maximumprinzips das zweidimensionale kanonische System $(\dot{s}(t), \dot{c}(t))$ her.

(c) Bestimmen Sie das langfristige Gleichgewicht $(\hat{s}, \hat{c})$ und dessen lokale Stabilitätseigenschaften über die Eigenwerte der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht.

(d) Beschreiben Sie qualitativ die optimale Lösung mit Hilfe einer Phasendiagrammanalyse im (s, c)-Raum. Zeichnen Sie zu diesem Zweck die Isoklinen $\dot{s} = 0$ und $\dot{c} = 0$ ein, und benutzen Sie die Tatsache, dass Trajektorien auf der Zustandsisokline senkrecht bzw. auf der Kontrollisokline waagrecht sind.