

28. In einer gegebenen Wirtschaft wird Kapital  $K$  gemäß der Vorschrift

$$\dot{K}(t) = sF(K(t), L(t)) - \delta K(t)$$

akkumuliert, wobei  $s$  die Sparquote beschreibt ( $0 < s < 1$ ),  $\delta$  den Abschreibungssatz bezeichnet ( $\delta > 0$ ), und  $F$  die Produktionsfunktion ist. Sei  $w > 0$  der Lohnsatz in einem großen benachbarten Land, wobei  $w$  als exogen angenommen wird. Die Arbeitskräfte  $L$  dieser Wirtschaft wachsen bzw. nehmen ab entsprechend der Differenz zwischen dem Grenzprodukt der Arbeit und  $w$ :

$$\dot{L}(t) = L(t) [F_L(K(t), L(t)) - w].$$

Wir nehmen an, dass

$$F(K(t), L(t)) = 4[K(t)L(t)]^{\frac{1}{4}}.$$

- Bestimmen Sie die Isokline  $\dot{K} = 0$  im  $(L, K)$ -Raum. Identifizieren Sie die Bereiche, wo  $\dot{K} > 0$  bzw.  $\dot{K} < 0$  gilt.
- Bestimmen Sie die Isokline  $\dot{L} = 0$  und die Bereiche, wo  $\dot{L} > 0$  bzw.  $\dot{L} < 0$  gilt.
- Gibt es ein Gleichgewicht  $(L^*, K^*)$  mit  $K^* > 0$  und  $L^* > 0$ ? Ist es stabil?
- Nehmen Sie an, dass  $w = 1$ ,  $s = 0.1$ ,  $\delta = 0.4$ , und bestimmen Sie  $K^*$  und  $L^*$ . Bestimmen Sie die Eigenwerte der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht, und beschreiben Sie das Systemverhalten in der Nähe des Gleichgewichtes.

29. Bezeichne  $K(t)$  den Kapitalstock zum Zeitpunkt  $t$  und  $P(t)$  den Umweltverschmutzungsgrad. Der Output ist durch

$$Y(t) = \frac{(K(t))^\alpha}{1 + P(t)}$$

gegeben, wobei  $0 < \alpha < 1$ . Das Sparkapital ist ein konstanter Anteil des Outputs, sodass die Änderungsrate des Kapitalstocks durch

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t)$$

bestimmt wird, wobei  $\delta$  den Abschreibungssatz beschreibt und  $s$  die Sparquote darstellt ( $0 < s < 1$ ). Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass

$$s = 2\delta.$$

Der Grad der Umweltverschmutzung ändert sich gemäß der Gleichung

$$\dot{P}(t) = K(t) - P(t).$$

- (a) Bestimmen Sie die Isoklinen  $\dot{P} = 0$  und  $\dot{K} = 0$ , und identifizieren Sie im  $(P, K)$ -Raum jene Bereiche, wo  $\dot{P}$  und  $\dot{K}$  eindeutige Vorzeichen haben.
- (b) Zeigen Sie, dass ein Gleichgewicht  $(P^*, K^*)$  existiert. Bestimmen Sie diese Gleichgewichtswerte und zeigen Sie, dass  $P^* > 0$  und  $K^* > 0$  gilt.
- (c) Stellen Sie fest, ob für  $\delta = 0.4$ ,  $s = 0.8$  und  $\alpha = 0.1$  die Eigenwerte der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht reell oder komplex sind. Beschreiben Sie das lokale Systemverhalten dieses Gleichgewichtes.
30. Die Steigerungsrate des Preises von Äpfeln ist proportional zum Nachfrageüberschuss:

$$\dot{P}(t) = k(D(t) - S(t)).$$

Bestimmen Sie in den beiden folgenden Fällen den Gleichgewichtspreis. Was müssen Sie für das Vorzeichen von  $k$  annehmen, um zu garantieren, dass das Gleichgewicht stabil ist?

(a)

$$\begin{aligned} D(t) &= A - BP(t), & A > 0, & B > 0, \\ S(t) &= -M + NP(t), & M > 0, & N > 0. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} D(t) &= A - B[P(t) - 1], & A > 0, & B > 0, \\ S(t) &= A + [P(t) - 1]^3. \end{aligned}$$

(Hinweis: Substituieren Sie  $Q(t) = P(t) - 1$ .)

31. Betrachten Sie das folgende optimale Kontrollmodell, welches eine zeitkontinuierliche Variante des Beispiels "Konsumieren oder Investieren?" aus der Vorlesung darstellt:

$$\max_{\{c(t)\}} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \ln(c(t)) dt$$

unter

$$\dot{s}(t) = rs(t) - c(t),$$

wobei die Zustandsvariable  $s(t)$  bzw. die Kontrollvariable  $c(t)$  den Kapitalstock bzw. den Konsum jeweils zum Zeitpunkt  $t$  beschreibt. Nehmen Sie an, dass die Diskontierung die Verzinsung übersteigt, d.h.

$$\delta > r \geq 0.$$

- (a) Formulieren Sie die Hamilton-Funktion in Momentanwertschreibweise, wobei Sie die Kozustandsvariable mit  $\lambda$  bezeichnen.
- (b) Leiten Sie mit Hilfe der notwendigen Optimalitätsbedingungen des Pontryagin'schen Maximumprinzips das zweidimensionale kanonische System  $(\dot{s}(t), \dot{c}(t))$  her.
- (c) Bestimmen Sie das langfristige Gleichgewicht  $(\hat{s}, \hat{c})$  und dessen lokale Stabilitätseigenschaften über die Eigenwerte der Jacobi-Matrix im Gleichgewicht.
- (d) Beschreiben Sie qualitativ die optimale Lösung mit Hilfe einer Phasendiagrammanalyse im  $(s, c)$ -Raum. Zeichnen Sie zu diesem Zweck die Isoklinen  $\dot{s} = 0$  und  $\dot{c} = 0$  ein, und benutzen Sie die Tatsache, dass Trajektorien auf der Zustandsisokline senkrecht bzw. auf der Kontrollisokline waagrecht sind.